

Фильтр Калмана в линейно-квадратичном гауссовском управлении

Цель работы: Изучить принцип построения фильтра Калмана и его применение в управлении совместно с линейно-квадратичным регулятором.

Задача работы: Средствами MATLAB спроектировать систему управления с линейно-квадратичным гауссовским регулятором.

Приборы и принадлежности: Персональный компьютер, интегрированная среда MATLAB.

Введение

Калмановская фильтрация является важной частью теории управления, играет большую роль в создании систем управления, технического зрения, макроэкономических моделей [3]. Фильтр Калмана позволяет оценивать полное внутреннее состояние объекта в случаях, когда размерность вектора состояния объекта превосходит размерность вектора данных наблюдений т.е. объект не полностью наблюдаем. Совместно с линейно-квадратичным регулятором фильтр Калмана позволяет решить задачу линейно-квадратичного гауссовского управления. В этой работе рассматриваются средства и алгоритмы MATLAB для построения фильтра Калмана и системы управления с линейно-квадратичным гауссовским регулятором.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Фильтр Калмана

Постановка задачи: имеется модель объекта в форме пространства состояний

- непрерывная форма:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c(u(t) + w(t)) \\ y_v(t) &= C_c x(t) + D_c(u(t) + w(t)) + v(t),\end{aligned}$$

- дискретная форма:

$$\begin{aligned}x[n+1] &= A_d x[n] + B_d(u[n] + w[n]) \\ y_v[n] &= C_d x[n] + D_d(u[n] + w[n]) + v[n]\end{aligned}$$

где x – переменные состояния объекта; u – управляющий вход, w – аддитивный белый гауссовский шум приведенный ко входу модели; y_v – измеряемый выход; v – аддитивный белый гауссовский шум в канале измерения выхода объекта. Математическое ожидание шумов $E(w) = E(v) = 0$, дисперсия $Q = E(w w^T)$, дисперсия $R = E(v v^T)$, ковариация $N = E(w v^T)$.

Необходимо найти решение, при котором оценки \hat{x} имеют минимальное отклонение от переменных состояния x объекта. Оценка точности сближения \hat{x} с x задается ковариационной матрицей ошибки:

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\{x - \hat{x}\}\{x - \hat{x}\}^T)$$

Оптимальную оценку вектора состояния динамической системы по неполным и зашумленным измерениям обеспечивает рекурсивный фильтр Калмана (Рисунок 1).

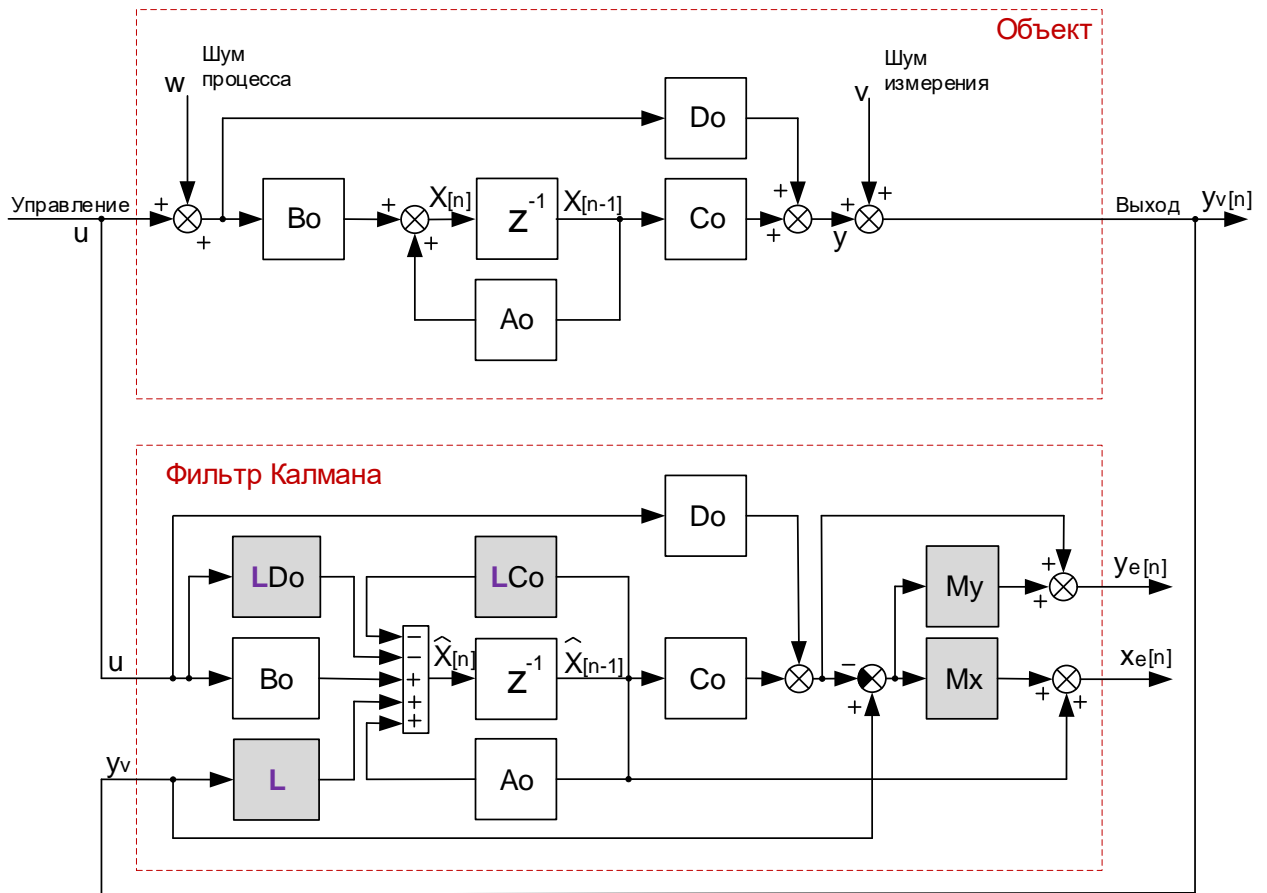


Рисунок 1. Структура дискретного фильтра Калмана с моделью объекта. Входы фильтра: управление объекта u и измеренный выход объекта y_v . Выходы фильтра: оценка переменных состояния x_e и оценка выходного сигнала объекта y_e .

Модель фильтра включает модель объекта: матрицы A_o , B_o , C_o , D_o (Рисунок 1). Алгоритм работы фильтра включает следующие вычисления.

Оценка переменных состояния объекта:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_c \hat{x}(t) + B_c u(t) + L(y_v(t) - C_c \hat{x}(t) - D_c u(t))$$

Прогноз на следующий цикл, выполняется на второй фазе текущего цикла:

$$\hat{x}[n+1|n] = A_d \hat{x}[n|n-1] + B_d u[n] + L(y_v[n] - C_d \hat{x}[n|n-1] - D_d u[n])$$

Выходные параметры фильтра:

$$x_e(t) = \hat{x}(t)$$

$$y_e(t) = C x_e(t)$$

Корректировка прогноза, выполняется на первой фазе текущего цикла:

$$x_e[n|n] = \hat{x}[n|n-1] + M_x(y_v[n] - C_d \hat{x}[n|n-1] - D_d u[n])$$

$$y_e[n|n] = C_d \hat{x}[n|n-1] + D_d u[n] + M_y(y_v[n] - C_d \hat{x}[n|n-1] - D_d u[n])$$

Порядок расчета матриц фильтра L , M_x , M_y приведен ниже. Вычисленные фильтром оценки переменных состояния x_e можно использовать для наблюдения за объектом или для управления объектом, подавая переменные x_e на входы квадратичного регулятора.

Для вычисления коэффициентов усиления обратной связи L и матриц M_x и M_y фильтра Калмана (Рисунок 1) необходимо решить уравнение Риккати [2]:

$$A^T X A - E^T X E - (A^T X B + S)(B^T X B + R)^{-1}(A^T X B + S)^T + Q_x = 0,$$

где X – решение уравнения Риккати: $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}$, пример для **объекта третьего порядка**.

A – транспонированная матрица A_d^T дискретной модели объекта: $\begin{bmatrix} A_d(1,1) & A_d(2,1) & A_d(3,1) \\ A_d(1,2) & A_d(2,2) & A_d(3,2) \\ A_d(1,3) & A_d(2,3) & A_d(3,3) \end{bmatrix}$;

E – единичная матрица: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

B – транспонированная матрица C_d объекта дополненная нулями: $\begin{bmatrix} C_d(1) & C_d(2) & C_d(3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$;

S – матрица $\begin{bmatrix} 0 & 0 & B_d(1)\sqrt{Q} \\ 0 & 0 & B_d(2)\sqrt{Q} \\ 0 & 0 & B_d(3)\sqrt{Q} \end{bmatrix}$ (\sqrt{Q} – среднее квадратическое отклонение шума объекта)

R – матрица: $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{R} & D_d(2)\sqrt{Q} \\ \sqrt{R} & -1 & 0 \\ D_d(2)\sqrt{Q} & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (\sqrt{R} – среднее квадратическое отклонение шума в канале измерения)

Q_x – нулевая матрица $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, коэффициентами Q_x можно настраивать степень сглаживания оценки реакции, например, $Q_x(2,2) = 1$ увеличивает сглаживание оценки выхода рассматриваемого объекта.

Независимо от порядка объекта (с одним входом и одним выходом) матрица B имеет 3 строки, S – три столбца, размер R равен 3×3

Коэффициенты корректировки предсказаний переменных пространства состояний объекта:

$$M_x = X C_d^T (C_d X C_d^T + \bar{R})^{-1},$$

где $\bar{R} = R + D_d N + N^T D_d^T + D_d Q D_d^T$, ($\bar{R} = R$, когда $D_d=0$);

R - дисперсия шума v в канале измерения выхода объекта;

D_d - матрица дискретной модели объекта;

$N = \sqrt{Q}$ - среднее квадратическое отклонение, Q - дисперсия входного шума w .

Коэффициенты корректировки оценки выходного сигнала объекта:

$$M_y = (C_d X C_d^T + D_d Q D_d^T + D_d N)(C_d X C_d^T + \bar{R})^{-1}, (M_y = C_d M_x, \text{ когда } D_d=0);$$

Коэффициенты усиления обратных связей фильтра Калмана:

$$L = (A_d X C_d^T + B_d Q D_d^T + B_d N)(C_d X C_d^T + \bar{R})^{-1}$$

Ошибку измерения R можно определить по погрешности измерительных приборов. Определение дисперсии Q шума процесса является более сложной задачей.

Объект

Для сравнения результатов методов моделирования будем использовать один и тот же объект, описание которого в форме пространства состояний дано ниже.

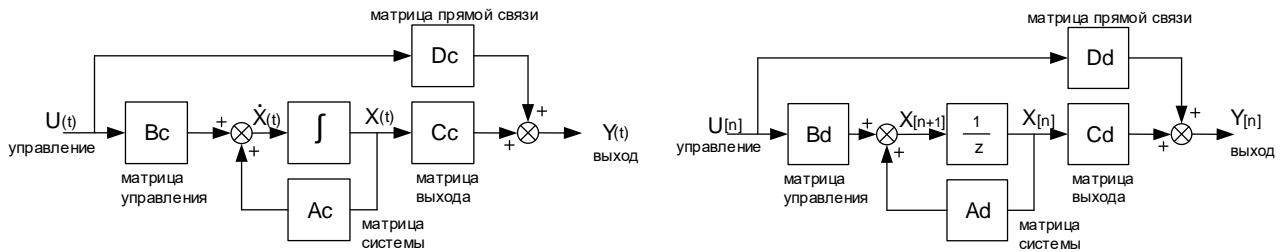


Рисунок 2. Структуры непрерывной (слева) и дискретной (справа) моделей в форме пространства состояний. Непрерывная модель имеет интегралы, дискретная - элементы задержки z^{-1} .

Матрицы дискретной модели объекта для построения системы управления с фильтром Калмана показаны на Рисунок 2.

$$A_d = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.5 & 0.12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_d = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.6 \\ 0.5 \end{bmatrix};$$

$$C_d = [1 \ 0 \ 0]; \quad D_d = [0]$$

Рисунок 3. Матрицы модели объекта в форме пространства состояний.

Предполагается, что на входе объекта подается гауссовский шум w с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $Q = 2.3$, который суммируется с управляющим воздействием u . Измерение выходного сигнала y объекта также содержит аддитивный шум v с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и дисперсией $R = 1$. Ковариация случайных величин w и v $N = \sqrt{QR}$.

Система уравнений, описывающая поведение непрерывного объекта:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_c x(t) + B_c(u(t) + w(t)) \\ y(t) = C_c x(t) + D_c(u(t) + w(t)) + v(t) \end{cases}$$

Система уравнений дискретного (по времени) объекта:

$$\begin{aligned} x[n+1] &= A_d x[n] + B_d(u[n] + w[n]) \\ y[n] &= C_d x[n] + D_d(u[n] + w[n]) + v[n] \end{aligned}$$

Перевод модели пространства состояний в передаточную функцию и обратно можно выполнить функциями MATLAB `tf` и `ss` соответственно.

ВНИМАНИЕ. Объект с одним и тем же распределением нулей и полюсов, может быть представлен множеством вариантов матриц A, B, C, D формы пространства состояний.

Перевод дискретной формы в непрерывную и обратно можно выполнить функциями MATLAB `d2c` и `c2d` соответственно, например, так получены эквивалентные импульсная и непрерывная передаточные функции рассматриваемого объекта:

$$\frac{-0.4z^2 - 0.24z + 0.072}{z^3 - 1.1z^2 + 0.5z - 0.12} \equiv \frac{0.01803s^2 - 1.079s - 1.661}{s^3 + 2.12s^2 + 2.425s + 0.819}$$

Соответствующие модели в форме пространства состояний показаны на Рисунок 4.

Корни характеристического полинома (полюса знаменателя передаточной функции):

- $s_1 = -0.8047 + 0.9776i$ $z_1 = 0.2500 + 0.3708i$
- $s_2 = -0.8047 - 0.9776i$ $z_2 = 0.2500 - 0.3708i$
- $s_3 = -0.5108 + 0.0i$ $z_3 = 0.6000 + 0.0i$

s_1 и s_2 (z_1 и z_2) – комплексно сопряженные корни, s_3 (z_3) – действительный корень (мнимая часть равна нулю). Рассматриваемый объект устойчив, поскольку все корни s непрерывной передаточной функции отрицательные, действительные части корней лежат в левой комплексной полуплоскости [1, стр. 88], все корни z эквивалентной импульсной передаточной функции по модулю меньше единицы [1, стр. 231].

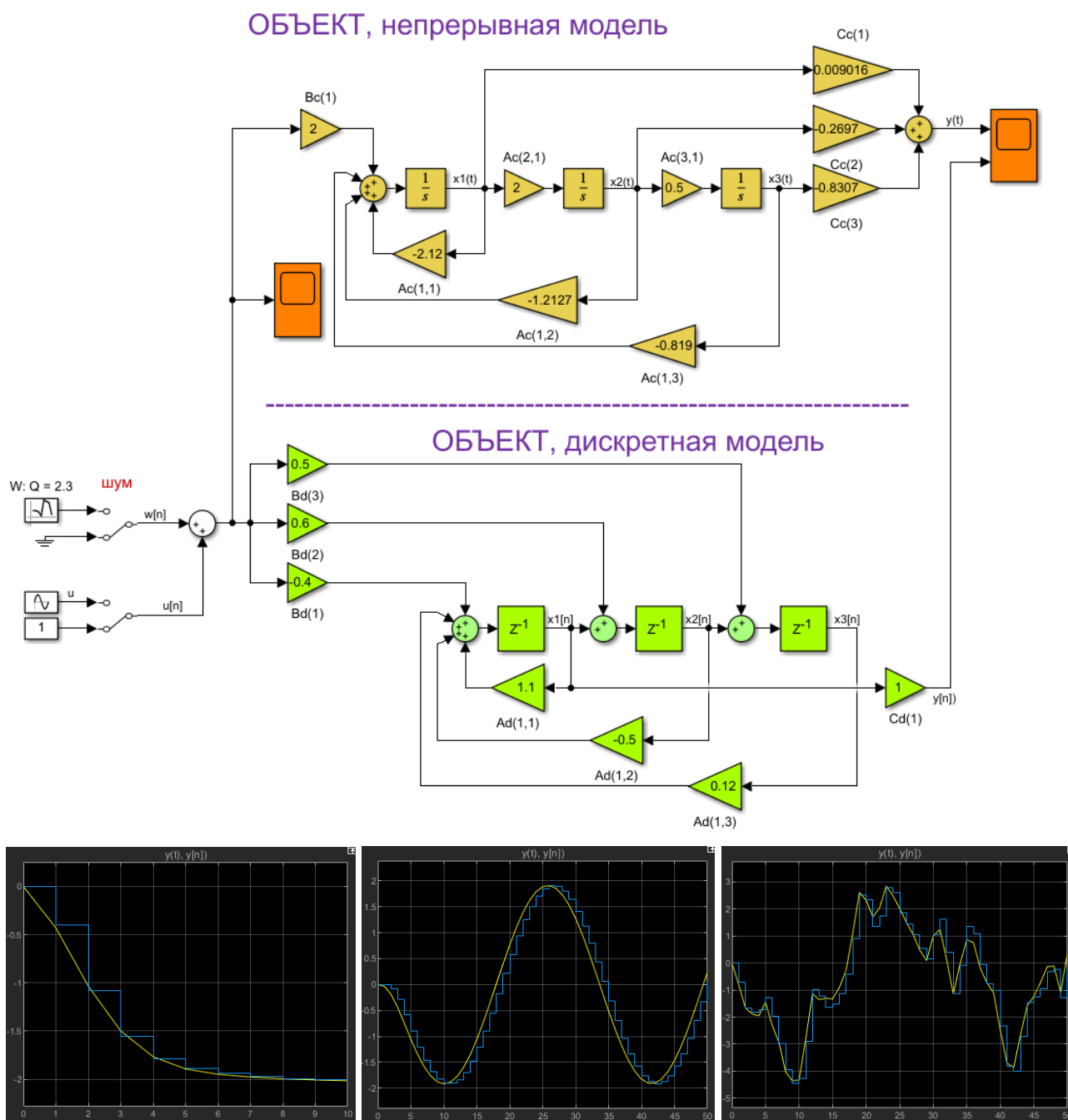


Рисунок 4. Эквивалентные непрерывная и дискретная модели (блок-схемы) и их реакции на единичное ступенчатое, синусоидальное и зашумленное синусоидальные воздействия (графики).

ВНИМАНИЕ. Если такт дискретизации модели уменьшить, например в 10 раз, то процессы дискретной модели пойдут в 10 раз быстрее. Для того, чтобы эквивалентная непрерывная модель “не отставала” действительные части ее корней должны быть увеличены также в 10 раз.

Расчет фильтра Калмана с применением стандартных функций MATLAB

Параметры модели как дискретного, так и непрерывного фильтра в форме пространства состояний можно вычислить в MATLAB с применением функции `kalman()`:

```
[kalmf,L,P,M,Z] = kalman(Plant,Q,R), где
% kalmf - A,B,C,D матрицы фильтра в форме пространства состояний
% L - матрица усиления обратной связи
% P - решение уравнения Риккати
% Mx - коэффициенты корректировки предсказаний  $X[n|n] = X[n|n-1] + Mx(y[n] - C*X[n|n-1] - D*u[n])$ 
% Z - симметричная матрица коэффициентов корректировки предсказаний
% My - коэффициенты корректировки предсказаний  $Y[n|n] = C*X[n|n-1] + D*u[n] + My(y[n] - C*X[n|n-1] - D*u[n])$ 
% Plant - модель объекта в форме пространства состояний
% Q - Дисперсия входного шума w,  $Q > 0$ 
% R - Дисперсия шума v измерения выхода y,  $R > 0$ 
```

Пример MATLAB программы для выбранного выше объекта:

```
% Матрицы пространства состояний дискретного объекта:
Ad = [1.1    -0.5    0.12,
      1.0     0.0     0.0,
      0.0     1.0     0.0];

Bd = [-0.4
      0.6
      0.5];

Cd = [1 0 0];

Dd = [0]

Plant = ss(Ad,[Bd Bd],Cd,Dd,-1,'inputname',{'u' 'w'},'outputname','y') % модель
дискретного объекта

eig(Plant) % корни дискретного объекта, модули корней устойчивого объекта меньше
единицы

Q = 2.3; % Дисперсия входного шума w, больше нуля
R = 1; % Дисперсия шума v измерения выхода y, больше нуля

[kalmf,L,Xcd,M,Z] = kalman(Plant,Q,R)
```

Таблица 1. Результаты вычисления функции kalman (Plant, Q, R)

<p>Описание параметров функции [kalmf,L,P,M,Z] = kalman(Plant,Q,R) % структура kalmf содержит A,B,C,D матрицы фильтра в форме пространства состояний % L - матрица усиления обратной связи % Xcd - решение уравнения Риккати % M - коэффициенты корректировки предсказаний $X[n n] = X[n n-1] + M(y[n]-C*X[n n-1]-D*u[n])$ % Z - симметричная матрица коэффициентов корректировки предсказаний</p>																																				
<p>kalmf.A =</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>x1_e</th> <th>x2_e</th> <th>x3_e</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>x1_e</th> <td>0.5603</td> <td>-0.5</td> <td>0.12</td> </tr> <tr> <th>x2_e</th> <td>0.4584</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <th>x3_e</th> <td>0.005619</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>		x1_e	x2_e	x3_e	x1_e	0.5603	-0.5	0.12	x2_e	0.4584	0	0	x3_e	0.005619	1	0	<p>kalmf.B =</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>u</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>x1_e</th> <td>-0.4</td> <td>0.5397</td> </tr> <tr> <th>x2_e</th> <td>0.6</td> <td>0.5416</td> </tr> <tr> <th>x3_e</th> <td>0.5</td> <td>-0.005619</td> </tr> </tbody> </table>		u	y	x1_e	-0.4	0.5397	x2_e	0.6	0.5416	x3_e	0.5	-0.005619							
	x1_e	x2_e	x3_e																																	
x1_e	0.5603	-0.5	0.12																																	
x2_e	0.4584	0	0																																	
x3_e	0.005619	1	0																																	
	u	y																																		
x1_e	-0.4	0.5397																																		
x2_e	0.6	0.5416																																		
x3_e	0.5	-0.005619																																		
<p>kalmf.C =</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>x1_e</th> <th>x2_e</th> <th>x3_e</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>y_e</th> <td>0.4584</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <th>x1_e</th> <td>0.4584</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <th>x2_e</th> <td>0.005619</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <th>x3_e</th> <td>0.4903</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		x1_e	x2_e	x3_e	y_e	0.4584	0	0	x1_e	0.4584	0	0	x2_e	0.005619	1	0	x3_e	0.4903	0	1	<p>kalmf.D =</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>u</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>y_e</th> <td>0</td> <td>0.5416</td> </tr> <tr> <th>x1_e</th> <td>0</td> <td>0.5416</td> </tr> <tr> <th>x2_e</th> <td>0</td> <td>-0.005619</td> </tr> <tr> <th>x3_e</th> <td>0</td> <td>-0.4903</td> </tr> </tbody> </table>		u	y	y_e	0	0.5416	x1_e	0	0.5416	x2_e	0	-0.005619	x3_e	0	-0.4903
	x1_e	x2_e	x3_e																																	
y_e	0.4584	0	0																																	
x1_e	0.4584	0	0																																	
x2_e	0.005619	1	0																																	
x3_e	0.4903	0	1																																	
	u	y																																		
y_e	0	0.5416																																		
x1_e	0	0.5416																																		
x2_e	0	-0.005619																																		
x3_e	0	-0.4903																																		
<p>L =</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>0.5397</td> </tr> <tr> <td>0.5416</td> </tr> <tr> <td>-0.0056</td> </tr> </tbody> </table>	0.5397	0.5416	-0.0056	<p>M =</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>0.5416</td> </tr> <tr> <td>-0.0056</td> </tr> <tr> <td>-0.4903</td> </tr> </tbody> </table>	0.5416	-0.0056	-0.4903																													
0.5397																																				
0.5416																																				
-0.0056																																				
0.5416																																				
-0.0056																																				
-0.4903																																				
<p>Xcd =</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>1.1815</td> <td>-0.0123</td> <td>-1.0695</td> </tr> <tr> <td>-0.0123</td> <td>1.3696</td> <td>0.6844</td> </tr> <tr> <td>-1.0695</td> <td>0.6844</td> <td>1.9445</td> </tr> </tbody> </table>	1.1815	-0.0123	-1.0695	-0.0123	1.3696	0.6844	-1.0695	0.6844	1.9445	<p>Z =</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>0.5416</td> <td>-0.0056</td> <td>-0.4903</td> </tr> <tr> <td>-0.0056</td> <td>1.3695</td> <td>0.6784</td> </tr> <tr> <td>-0.4903</td> <td>0.6784</td> <td>1.4202</td> </tr> </tbody> </table>	0.5416	-0.0056	-0.4903	-0.0056	1.3695	0.6784	-0.4903	0.6784	1.4202	<p>My =</p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>0.5416</td> </tr> </tbody> </table>	0.5416															
1.1815	-0.0123	-1.0695																																		
-0.0123	1.3696	0.6844																																		
-1.0695	0.6844	1.9445																																		
0.5416	-0.0056	-0.4903																																		
-0.0056	1.3695	0.6784																																		
-0.4903	0.6784	1.4202																																		
0.5416																																				

По данным Таблица 1 построена Simulink модель фильтра Калмана, которая показана на Рисунок 5. Через канал kalmf.B(:,2) с коэффициентами вектора L (Таблица 1) на вход фильтра подается измеряемый сигнал y_v . Коэффициенты корректировки предсказаний y_e и переменных состояния объекта x_e содержатся в матрице M и kalmf.D(:,2). Связь матриц фильтра с матрицами объекта и векторами L и M показана ниже.

- $kalmf.A = A_d - L * C_d$
- $kalmf.B = [B_d, L]$
- $kalmf.C = [(eye(1) - C_d * M_x) * C_d; eye(r_A) - M_x * C_d]$
- $kalmf.D = [D_d \ C_d * M_x; -M_x * D_d \ M_x]$,

где $r_A = 3$ – размерность (rank) матрицы A.

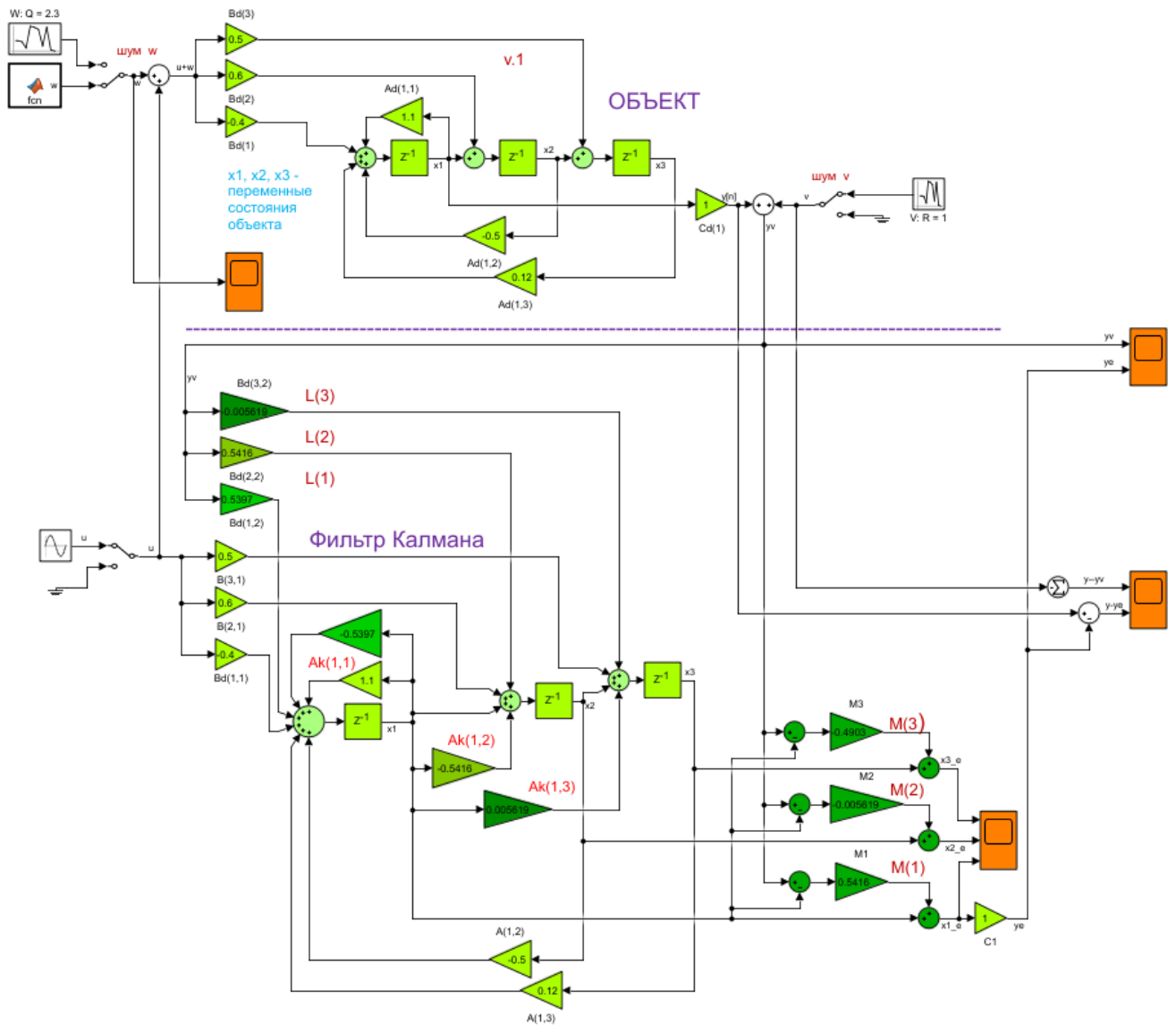


Рисунок 5. Модель объекта и фильтра Калмана. Фильтр Калмана содержит модель объекта. Блоки внешнего объекта и объекта внутри фильтра выделены одним цветом.

Сравнение переменных объекта с оценками переменных вычисляемых фильтром Калмана показано на графиках Рисунок 6 и Рисунок 7.

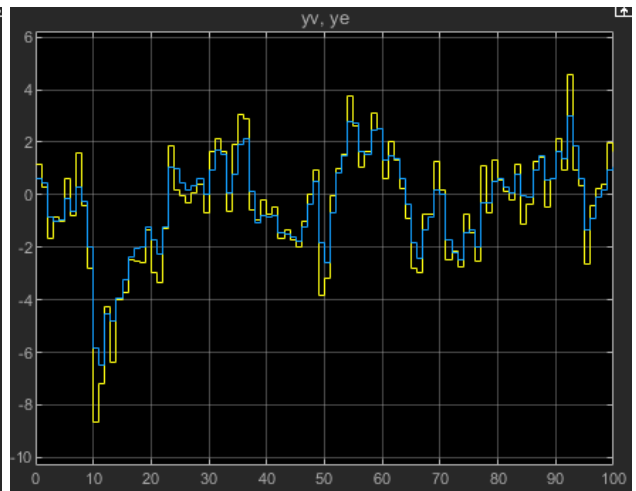
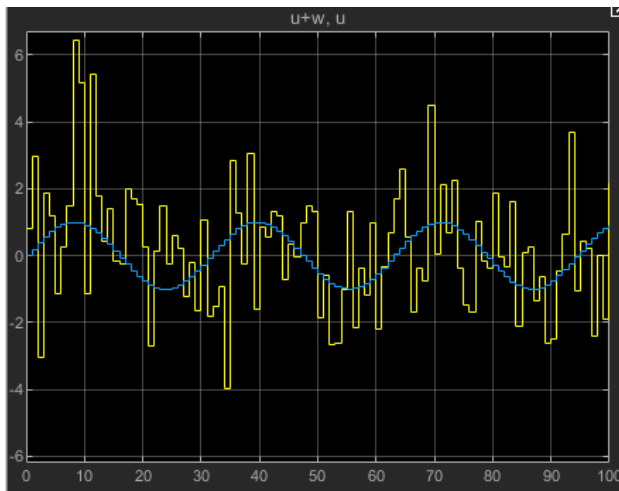
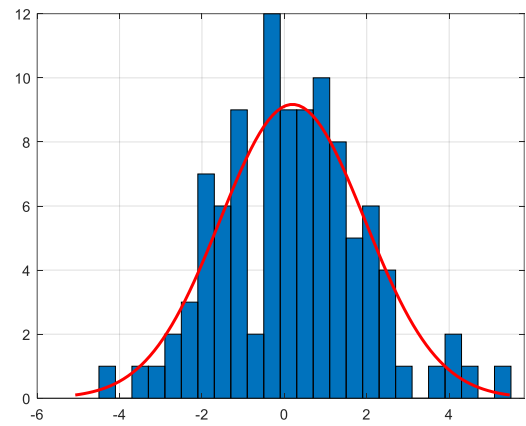
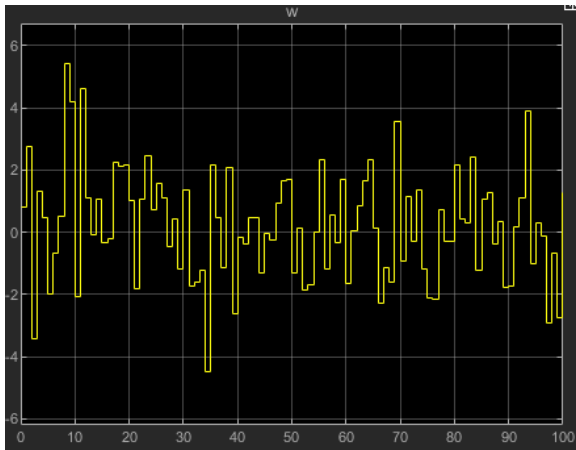


Рисунок 6. Графики модели Рисунок 5. Шум $w[n]$ (вверху слева) и его распределение (вверху справа), вход объекта $u[n]$ и $w[n]$ (внизу слева), зашумленный выход объекта $y_v[n]$ и оценка выхода фильтром $y_e[n]$ (внизу справа). Период квантования 1 с.

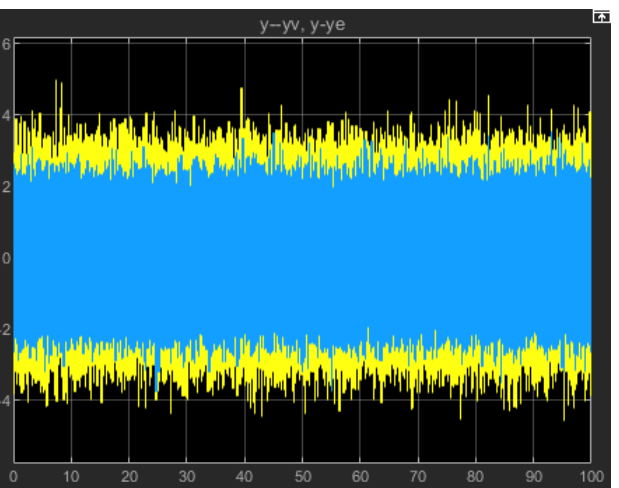
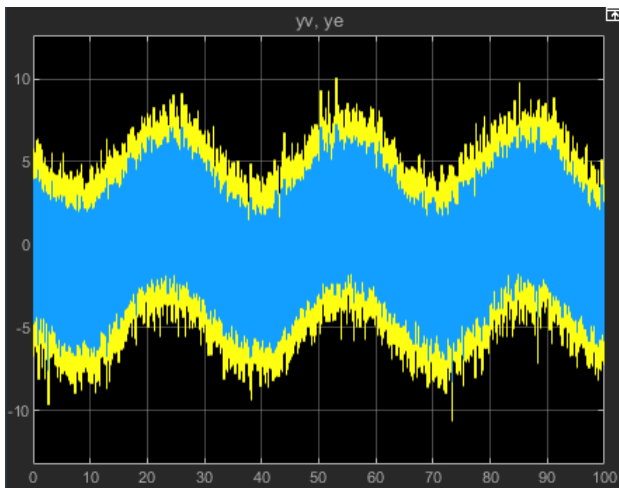


Рисунок 7. Графики модели Рисунок 5. Период квантования 0.1 мс.

Аналитическое построение дискретного фильтра Калмана

Ниже показана последовательность вычислений параметров Фильтра Калмана для объекта, параметры которого заданы в разделе “Объект” выше. Объект имеет один общий вход для управления u и аддитивного шума w и один выход y . Для наглядности текст программы содержит промежуточные результаты, которые размещены с отступом в один Tab.

Пример.

ВНИМАНИЕ: Представленная ниже программа выполняет корректный (относительно результатов функции `kalman`) расчет дискретных фильтров Калмана для

- устойчивых объектов от 2-го до 5го порядков (более высокие порядки не проверялись),
- порядок числителя передаточной функции объекта должен быть меньше порядка знаменателя,
- матрица D модели объекта в форме пространства состояний должна равняться нулю, т.е. управление по каналу D не должно передаваться на выход объекта.

% Ввод параметров объекта и констант Q, R, N:

```
Ad = [1.1 -0.5 0.12,  
      1.0 0.0 0.0,  
      0.0 1.0 0.0];
```

```
Bd = [-0.4  
      0.6  
      0.5];
```

```
Cd = [1 0 0];
```

```
Dd = [0]
```

```
Plant = ss(Ad, [Bd Bd], Cd, Dd, -1, 'inputname', {'u' 'w'}, 'outputname', 'y')  
eig(Plant)
```

```
Q = 2.3; % Дисперсия входного шума w, больше нуля
```

```
R = 1; % Дисперсия шума v измерения выхода y объекта, больше нуля
```

```
N = sqrt(Q) % среднее квадратическое отклонение шума объекта
```

% Подготовка входных данных уравнения Риккати

```
r_A = rank(Ad) % размерность матрицы A  
r_A =  
      3
```

```
F2 = [sqrt(R) 0];
```

```
Rm = [zeros(1) F2; F2' -eye(2)];
```

$$Rm = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{R} & 0 \\ \sqrt{R} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
CC = [Cd; zeros(2, r_A)]; R
```

$$CC = \begin{bmatrix} C_d(1) & C_d(2) & C_d(3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```

Nm = [zeros(r_A,2), Bd*N];
Nm = 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & B_d(1)\sqrt{Q} \\ 0 & 0 & B_d(2)\sqrt{Q} \\ 0 & 0 & B_d(3)\sqrt{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.6066 \\ 0 & 0 & 0.9099 \\ 0 & 0 & 0.7583 \end{bmatrix}$$

E = Plant.E;
Qm = zeros(r_A);
Qm = 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

if isempty(Rm) % если R не определен
    Rm = eye(r_A);
end
if isempty(Nm) % если Nm не определен
    Nm = 0; %
end
if isempty(E) % если E не определен
    E = eye(r_A);
E = 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Решение уравнения Риккати
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

X = sym('x',r_A) % Матрица символьных переменных
X = [x1 x2 x3; x4 x5 x6; x7 x8 x9]
X = 
$$\begin{bmatrix} x_{1_1} & x_{1_2} & x_{1_3} \\ x_{2_1} & x_{2_2} & x_{2_3} \\ x_{3_1} & x_{3_2} & x_{3_3} \end{bmatrix}$$

% Уравнение Риккати:
% A'*X*A - E'*X*E - (A'*X*B + S) *inv(B'*X*B + R) *(A'*X*B + S)' + Q
:HELP > idare

HELP MATLAB:  $A^T X A - E^T X E - (A^T X B + S)(B^T X B + R)^{-1}(A^T X B + S)^T + Q = 0$ 
ВЫПОЛНЕНА:  $A_d X A_d^T - E X E^T - (A_d X \cdot C C^T + N_m)(C C \cdot X \cdot C C^T + R_m)^{-1}(A_d X \cdot C C^T + N_m)^T + Q_m = 0$ 
Equ = Ad*X*Ad'-E*X*E'-(Ad*X*CC'+Nm)*inv(CC*X*CC'+Rm)*(Ad*X*CC'+Nm)'+Qm == 0
Xc = solve(Equ,X) % решение уравнения Риккати

% перевод символьных переменных в double (vpa, eval) и перевод ряда переменных в
матрицу (reshape)
Xcd = reshape(eval(vpa(struct2cell(Xc))),r_A,r_A)
Xcd = 
$$\begin{bmatrix} 1.1815 & -0.0123 & -1.0695 \\ -0.0123 & 1.3696 & 0.6844 \\ -1.0695 & 0.6844 & 1.9445 \end{bmatrix}$$

% Матрица K коэффициентов обратной связи
% K = inv(B'*Xcd*B+R)*(B'*Xcd*A+S')
K = inv(CC*Xcd*CC'+Rm)*(CC*Xcd*Ad'+Nm')
K = 
$$\begin{bmatrix} 0.5397 & 0.5416 & -0.0056 \\ 0.5397 & 0.5416 & -0.0056 \\ 0.6066 & -0.9099 & -0.7583 \end{bmatrix}$$


```

```

L = K(1,:) ' % матрица усиления обратной связи (первый вариант)

L = 
$$\begin{bmatrix} 0.5397 \\ 0.5416 \\ -0.0056 \end{bmatrix}$$


Ra = R + Dd*N + N'*Dd'+Dd*Q*Dd '
Ra =
1
% Mx - коэффициенты корректировки предсказаний X[n|n] = X[n|n-1] + Mx(y[n]-
C*X[n|n-1]-D*u[n])
Mx = Xcd*C'*inv(C*Xcd*C'+Ra)

Mx = 
$$\begin{bmatrix} 0.5416 \\ -0.0056 \\ -0.4903 \end{bmatrix}$$


% My - коэффициенты корректировки оценки выходного сигнала объекта Y[n] = CX[n-
1]+Du[n]+My(y[n]-C*X[n-1]-D*u[n])
My = (Cd*Xcd*Cd'+Dd*Q*Dd'+Dd*N)*inv(Cd*Xcd*Cd'+Ra)

My = 0.5416 % My = Cd*Mx

% матрица усиления обратной связи (второй вариант)
L = (Ad*Xcd*Cd'+Bd*Q*Dd'+Dd*N)*inv(Cd*Xcd*Cd'+Ra);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Построение модели фильтра Калмана: матрицы (Ae, Be, Ce, De)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Ae = Ad-L*Cd
Be = [Bd, L]
Ce = [(eye(1)-Cd*Mx)*Cd ; eye(r_A)-Mx*Cd]
De = [Dd Cd*Mx; -Mx*Dd Mx]

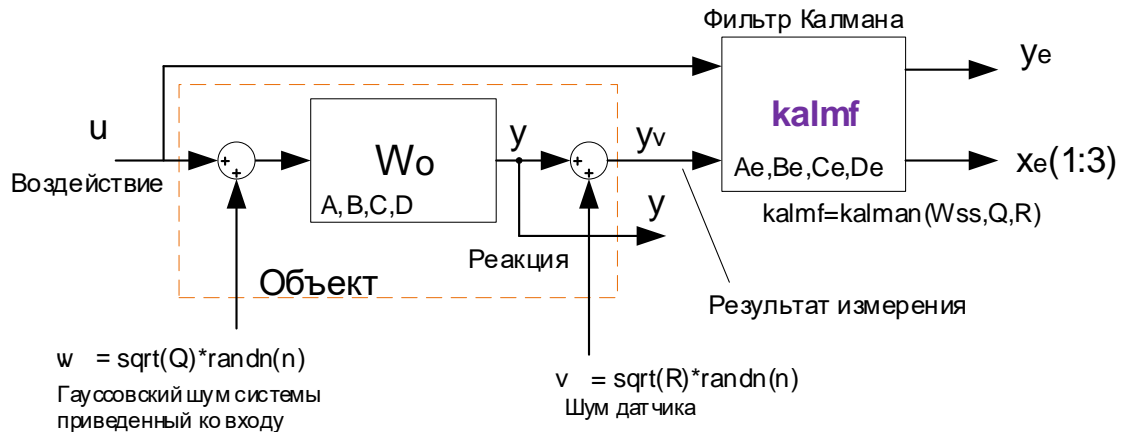
Ts = Plant.Ts
kalmf = ss(Ae, Be, Ce, De, Ts, 'inputname', {'u' 'yv'}, 'outputname', {'ye' 'x1e' 'x2e'
'x3e'})

Вычисленные матрицы фильтра Кальмана Ae, Be, Ce, De; матрица L усиления обратной связи;
решение Xcd уравнения Риккати и коэффициенты M корректировки предсказаний полностью
совпадают с данными Таблица 1.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Дискретная модель "Объект - Фильтр Калмана"
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Модель объекта со входами u, w, v и выходами y и yv, где
% u - управление
% w - аддитивный шум на входе объекта
% v - аддитивный шум в канале измерения реакции
% y - реакция объекта на зашумленный вход u + w
% yv - измеряемая реакция y + v

```



```

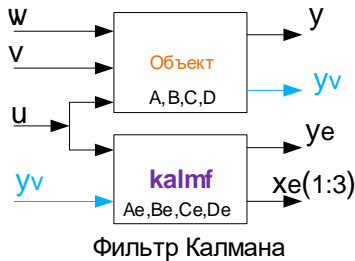
a = Ad;
b = [Bd Bd 0*Bd];
c = [Cd; Cd];
d = [0 0 0; 0 0 1];
Wo = ss(a,b,c,d,-1, 'inputname', {'u' 'w' 'v'}, 'outputname', {'y' 'yv'});

```

```

sys = parallel(Wo, kalmf, 1, 1, [], []); % параллельное соединение двух моделей

```



% Подключение yv выхода объекта к yv входу фильтра

Формат команды:

```

SimModel = feedback(sys раз., sys ОС, [номера входов], [номера выходов], знак ОС=+/-1);

```

```

SimModel = feedback(sys, 1, [4], [2], 1); %

```

Минимизация модели (остаются только обозначенные порты):

```

SimModel = SimModel([1 3 4 5 6], [1 2 3]); % удаление портов yv: вход N4 и выход N2

```

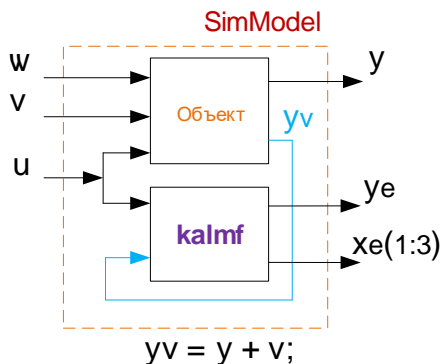


Рисунок 8. Модель “объект – фильтр Калмана”

```

SimModel.inputname % Список воздействий модели (Рисунок 8)
3×1 cell array
{'w'}
{'v'}

```

```

        {'u'}

SimModel.outputname % Список реакций модели (Рисунок 8)
    5×1 cell array
        {'y' }
        {'ye' }
        {'x1e' }
        {'x2e' }

        {'x3e' }

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Вычисление реакции модели "объект - фильтр Калмана" (Рисунок 9)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

t = (0:100)'; % шкала времени, шаг 1с.
u = sin(t/5); % управляющее воздействие

n = length(t);

rng default % Default установка генератора случайных чисел в начальное положение
w = sqrt(Q)*randn(n,1); % шум - нормально распределенные числа
v = sqrt(R)*randn(n,1); % шум - нормально распределенные числа

out = lsim(SimModel,[w,v,u]); % out = [y,ye,xе1,xе2,xе3], шум v влияет на ye и не
% влияет на y
y = out(:,1); % реакция на u+w
ye = out(:,2); % оценка ye измеряемого выхода объекта - выход фильтра
yv = y + v; % измеряемый выход y объекта с шумами v датчика

% Построение графиков
clf % очистка окна графопостроителя
subplot(211), plot(t,y,'b',t,yv,'c',t,ye,'r--'),
legend('y','yv','ye','Location','Northwest')
grid
xlabel('Номер дискретизации в 1 с'), ylabel('Выход')
title('Фильтр Калмана')
subplot(212), plot(t,y-yv,'g',t,y-ye,'r--'),
legend('y-yv','y-ye','Location','Southeast')
grid
xlabel('Время, с (1e2 дискрет)'), ylabel('Ошибка')

MeasErr = y-yv;
MeasErrCov = sum(MeasErr.*MeasErr)/length(MeasErr) % Дисперсия шума v
    MeasErrCov =
        0.9992
EstErr = y-ye;
EstErrCov = sum(EstErr.*EstErr)/length(EstErr) % Дисперсия ошибки y-ye оценки
% выходного сигнала y
    EstErrCov =
        0.6559

```

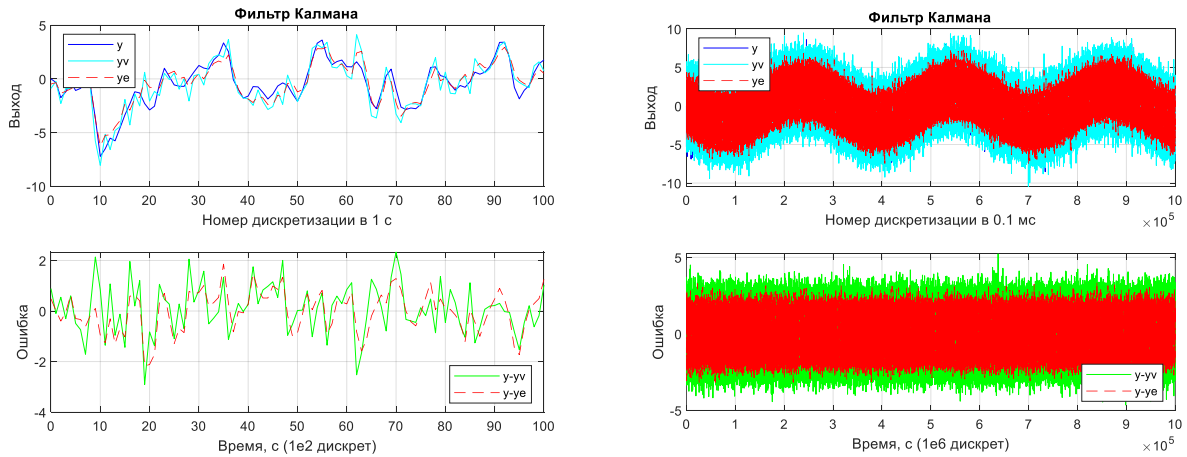


Рисунок 9. Характеристики фильтра Калмана при дискретизации 1 с (слева) и 0.1 мс (справа). Дисперсия шума v на участке измерения: $R \sim 1$, дисперсия ошибки оценки сигнала y : ~ 0.54 ($1e6$ отсчетов) .. 0.66 (100 отсчетов). Графики (справа) вычисленные m -программой, совпадают с графиками, вычисленными в Simulink (Рисунок 7).

Система управления с линейно – квадратичным гауссовским регулятором

Цель системы управления с квадратичным регулятором заключается в минимизации функции затрат.

Линейно-квадратичный гауссовский регулятор (LQG-регулятор) является сочетанием фильтра Калмана, т.е. линейно-квадратичной оценки (LQE), и линейно-квадратичного регулятора (LQR). Разделение принципов гарантирует, что они могут быть разработаны отдельно. LQG управление относится к линейным как стационарным так и нестационарным системам. Применение LQG управления к нестационарным системам позволяет спроектировать линейные регуляторы с обратной связью для нелинейных неопределенных систем.

LQG управление не обеспечивает хорошие свойства надежности. После разработки регулятора необходимо проверить робастные свойства устойчивости замкнутой системы.

Построение линейно – квадратичного (LQR) регулятора

Проектирование линейно-квадратичного регулятора подробно изложено в работе [4]. Место регулятора в структуре системы управления с фильтром Калмана показано на Рисунок 10. Оценки переменных состояния объекта, вычисленные фильтром Калмана, подаются на вход регулятора. Отслеживание переменных состояния объекта по управлению и выходу объекта может выполнять и наблюдатель, расчет которого приведен в работе [4]. Квадратичный регулятор не использует операцию дифференцирования, как это делает ПИД регулятор.

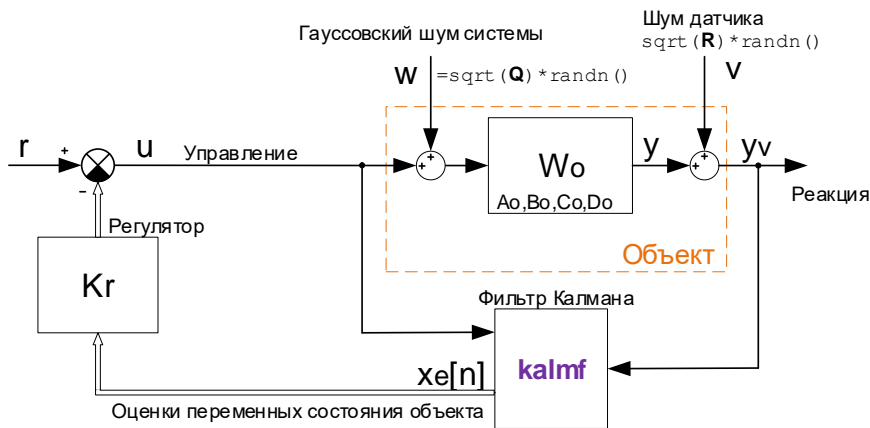


Рисунок 10. Структура модели системы управления с фильтром Калмана и линейно-квадратичным регулятором.

Вспользуемся стандартной функцией `lqr()` MATLAB для вычисления коэффициентов **Kr** дискретного линейно-квадратичного регулятора:

Параметры объекта A_d, B_d, C_d, D_d, Q, R приведены в разделе Объект выше.

```

Wo_ss = ss (Ad, Bd, Cd, Dd, -1) % модель дискретного объекта в форме
пространства состояний
[Kr, Xcr, p] = lqr (Wo_ss, Q, R)
% Kr - параметры линейно-квадратичного регулятора
% Xcr - решение уравнения Риккати

```

```

Kr =
    -0.6956    0.6698   -0.1387

```

Модель системы управления с LQG-регулятором (совокупность фильтра Калмана и линейно-квадратичного регулятора) показаны на Рисунок 11. Управление работает в условиях шума системы w и шума v в канале измерения выходного сигнала объекта.

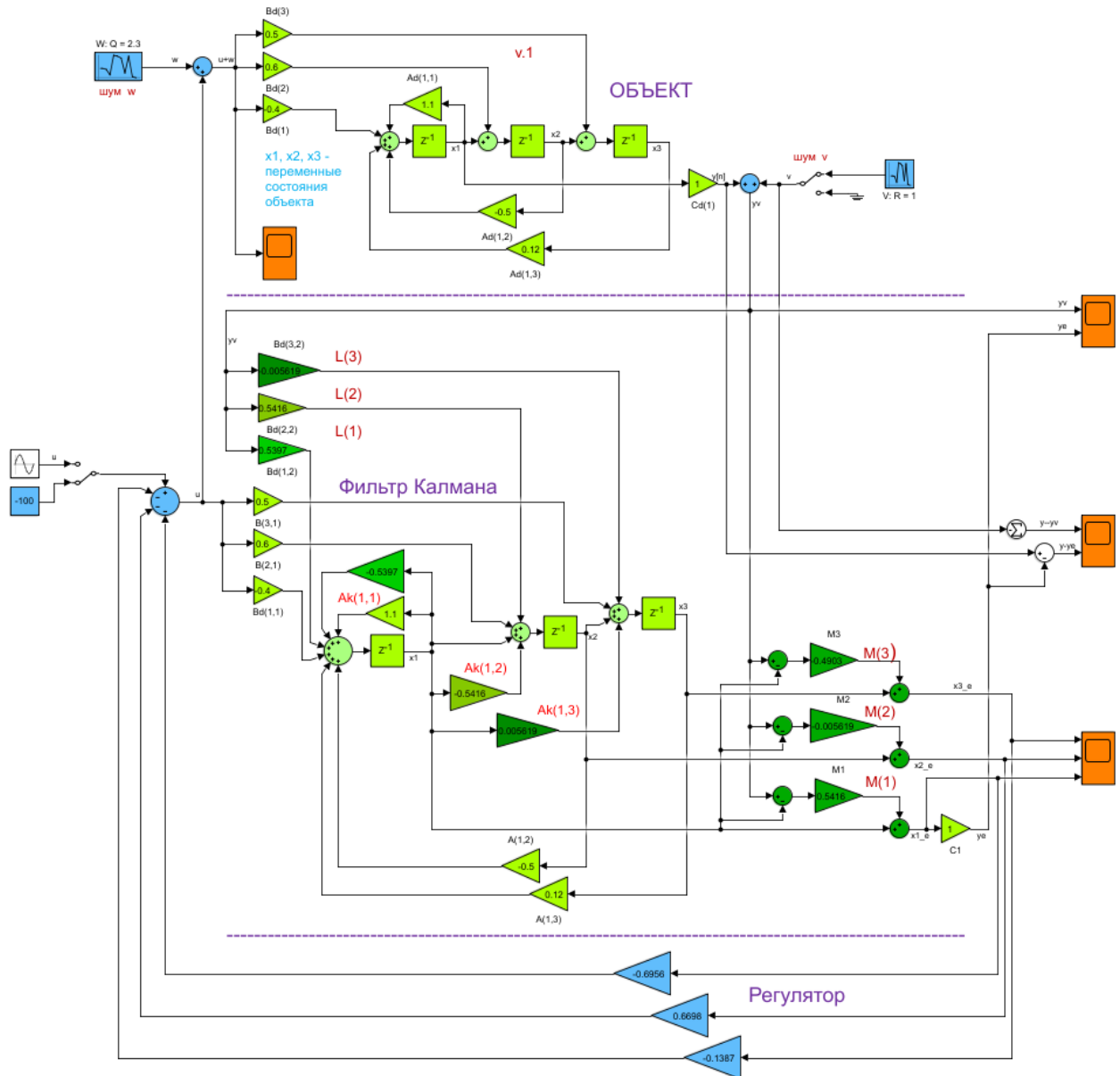


Рисунок 11. Дискретная Simulink модель системы управления с гауссовским линейно-квадратичным регулятором.

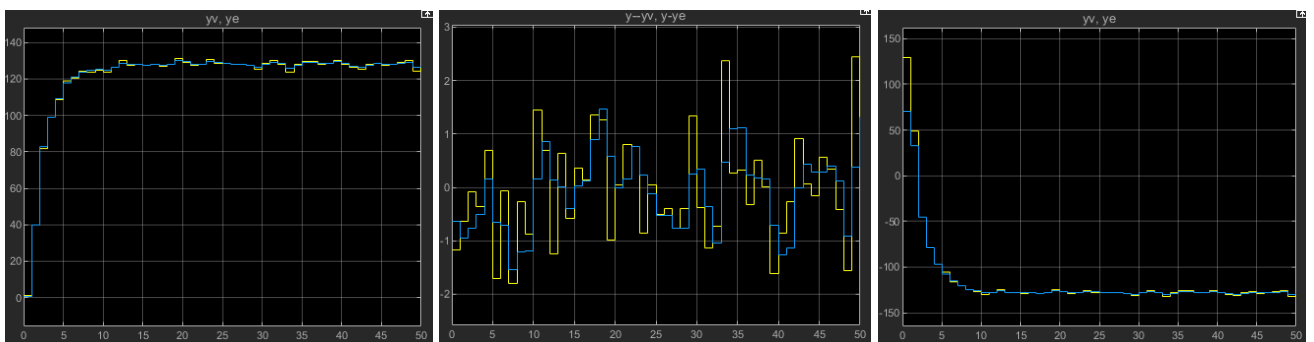


Рисунок 12. Реакция на ступенчатое воздействие модели Рисунок 11 системы управления при нулевых начальных условиях объекта и фильтра (слева). Ошибка оценки фильтром Калмана зашумленного выходного сигнала объекта во время переходного процесса (в центре). Реакция на ступенчатое воздействие при разных начальных значениях переменных состояния фильтра и объекта: $X_{\text{фильтра}} = [0, 0, 0]$ $X_{\text{объекта}} = [128.3, 85.74, 57.85]$.

Решение уравнения Риккати методом последовательного приближения

Найденное ранее функцией [kalmf, L, Xcd, Mx, Z, My] = kalman(Plant, Q, R) и аналитическим методом решение Xcd уравнения Риккати:

```
Xcd =
    1.181519140741375   -0.012259040038068   -1.0695444496962210
   -0.012259040038068    1.369603838662559    0.684380503104868
   -1.0695444496962210    0.684380503104868    1.944534949025124
```

можно получить последовательными итерациями, как показано в следующем примере.

```
X = zeros(3,3);
for i = 1:10
    % Уравнение Риккати:
    % A'*X*A - E'*X*E - (A'*X*B + S)*inv(B'*X*B + R)*(A'*X*B + S)' + Q
    % и его реализация внутри функции kalman:
    X = Ad*X*Ad' - (Ad*X*CC' + Nm)*inv(CC*X*CC' + Rm)*(Ad*X*CC' + Nm)' + Qm;
    Xp(i) = X(1,1)
end

figure X
plot(Xp, 'c')
hold on
plot(Xp, 'xc')
grid
xlabel('Номер дискретизации');
ylabel('X(1,1)');
title(sprintf('Сходимость решения уравнения Риккати, X(end) = %5.4f;', Xp(end)));
return
```

```
Xcd =
    5.216688478100722   1.951841141671024
    1.951841141671024   1.968637505127686
```

Как показано на Рисунок 13 для рассматриваемого объекта, **Рисунок 13**. Сходимость решения уравнения Риккати для рассматриваемого объекта. сходимость в 16 разрядов получена за 19 итераций.

```
Xcd = 1.181519140741375
Xp =
[0.3680000000000000 1.145426900584796 1.174623744780139
 1.180742742348204 1.181190460900341 1.181432460964372
 1.181517874201162 1.181518084259761 1.181519083156243
 1.181519107586326 1.181519135155487 1.181519140596992
 1.181519140624171 1.181519140737484 1.181519140737994
 1.181519140741040 1.181519140741349 1.181519140741366
 1.181519140741376
```

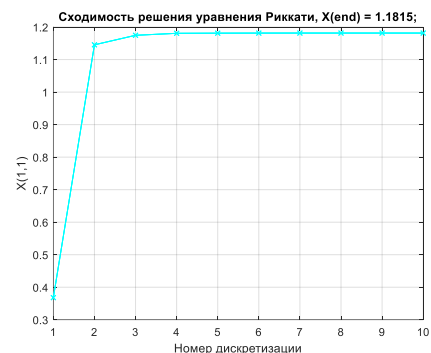


Рисунок 13. Сходимость решения уравнения Риккати для рассматриваемого объекта.

Этим же методом последовательного приближения можно найти решение Риккати для неустойчивых объектов, например, для объекта $W_o = \frac{1}{s^2+1}$. Требуется 30 итераций, чтобы получить приближение итерационного решения уравнения Риккати с точностью в 16 разрядов относительно решения функции **kalman**.

Вычисление матрицы М фильтра Кальмана методом последовательного приближения

Уравнение Риккати

$$A^T X A - E^T X E - (A^T X B + S)(B^T X B + R)^{-1}(A^T X B + S)^T + Q_x = 0,$$

решается в MATLAB функцией **kalman** при следующей замене компонентов уравнения для объекта с $D_d=[0]$.

$$A_d X A_d^T - E^T X \cdot E - (A_d X \cdot C C^T + N_m)(C C \cdot X \cdot C C^T + R)^{-1}(A_d X \cdot C C^T + N_m)^T + Q_x = 0,$$

Перенеся $-E^T X \cdot E = X$ в правую часть, получим

$$X = A_d X A_d^T - (A_d X \cdot C C^T + N_m)(C C \cdot X \cdot C C^T + R)^{-1}(A_d X \cdot C C^T + N_m)^T + Q_x,$$

или

$$X = A_d X A_d^T - A_d X C_d^T (C_d X C_d^T + R)^{-1} (A_d X C_d^T)^T + B_d Q B_d^T,$$

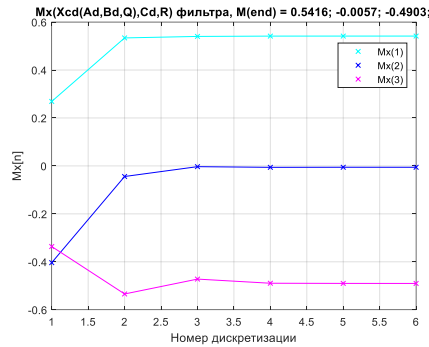
где, выделенное цветом выражение $X C_d^T (C_d X C_d^T + R)^{-1}$ равно M_x , как это показано выше в разделе “Фильтр Калмана”. Следовательно, матрицу M_x можно вычислить циклической последовательностью, как показано в следующем примере для рассматриваемого дискретного объекта. В примере $X_{cd} = X$.

```
Q = 2.3; % дисперсия шума
R = 1; % дисперсия шума
Xcd=Bd*Q*Bd' % начальные значения
Xcd =
    0.3680    -0.5520   -0.4600
   -0.5520     0.8280    0.6900
   -0.4600     0.6900    0.5750
M = [];
for i=1:length(t) % when Dd = [0]
    % Measurement update
    Mx = Xcd*Cd' / (Cd*Xcd*Cd'+R) % Mx = Xcd*Cd' / (Cd*Xcd*Cd'+Ra)
    M = [M Mx];
    Xcd = Ad*Xcd*Ad'-Ad*Mx*Cd*Xcd*Ad' + Bd*Q*Bd' % решение Риккати для Mx(i)
end
```

```

figure
plot(M(1,:), 'xc')
hold on
plot(M(2,:), 'xb')
plot(M(3,:), 'xm')
plot(M(1,:), 'c')
plot(M(2,:), 'b')
plot(M(3,:), 'm')
grid
legend('Mx(1)', 'Mx(2)', 'Mx(3)')
xlabel('Номер дискретизации');
ylabel('Mx[n]')
title(sprintf('Mx(Xcd(Ad,Bd,Q),Cd,R) фильтра, M(end) = %5.4f; %5.4f; %5.4f;', M(:,end)))

```



Как показано на графиках выше, сходимость вычисления коэффициентов M фильтра Калмана до значений Таблица 1 получена за 6 циклов.

Циклическая работа фильтра Калмана

Циклическое вычисление оценок переменных состояния рассматриваемого дискретного объекта при известных коэффициентах фильтра Калмана показано ниже, в виде блок-схемы и m -программы.

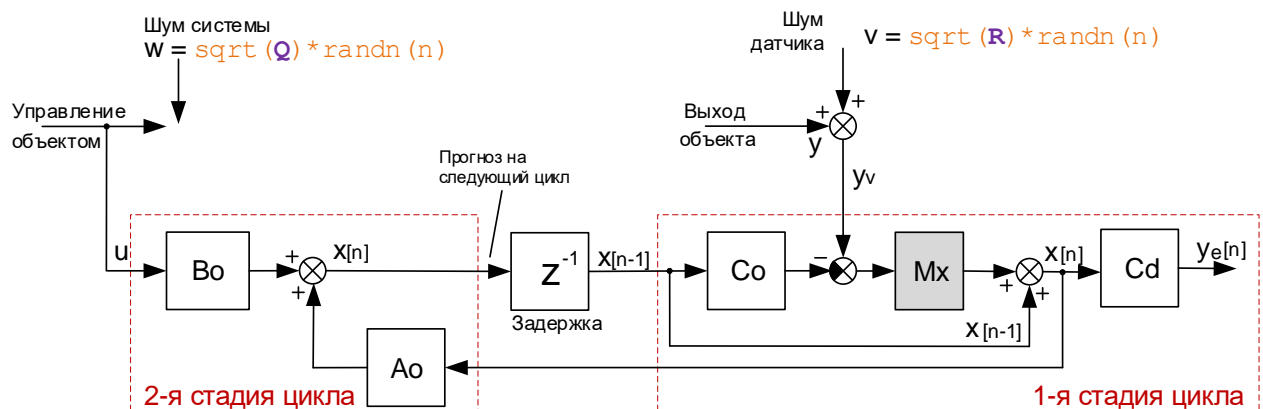


Рисунок 14. Стадии циклической работы фильтра Калмана.

```

Q = 2.3; % A number greater than zero
R = 1; % A number greater than zero

t = (0:100)';
u = sin(t/5);

rng default % установка генератора случайных чисел в начальное положение

% Шум на входе и выходе объекта (нормально распределенные числа)
w = sqrt(Q) * randn(length(t), 1)
v = sqrt(R) * randn(length(t), 1) % шум - нормально распределенные числа

sys = ss(Ad,Bd,Cd,Dd,-1) % модель дискретного объекта в форме пространства состояний
eig(sys) % корни дискретного объекта, модули корней устойчивого объекта меньше единицы

```

```

y = lsim(sys,u+w)    % реакция системы на зашумленное воздействие
yv = y + v          % v - шум в канале измерения

P=Bd*Q*Bd'          % Initial error covariance
x=zeros(3,1)        % начальные значения переменных состояния x[1:3] = 0
xe1=x;
xe2=x;

% Подготовка массивов (резервирование памяти для увеличения быстродействия)
ye = zeros(length(t),1)
ye1 = zeros(length(t),1)
errcov = zeros(length(t),1)

Mx = [0.5416; -0.0057; -0.4903]; % коэффициенты фильтра Калмана

for i=1:length(t) % when Dd = [0]
    %////////////////////////////////////
    % Вариант N1 с фиксированным M
    %////////////////////////////////////
    % Сначала, корректировка оценок по результатам измерения
    xe1 = xe1 + Mx*(yv(i)-Cd*xe1) % x[n] фильтра: x_e[n]=x[n-1]+Mx*(yv[n]-
C_d*x[n-1])
    ye1(i) = Cd*xe1;

    % Затем, вычисление оценок переменных состояния объекта
    xe1 = Ad*xe1 + Bd*u(i) % x[n+1|n]

    %////////////////////////////////////
    % Вариант N2 с фиксированным M, + неправильный порядок вычисления
    %////////////////////////////////////
    % Вычисление оценок переменных состояния объекта
    xe2 = Ad*xe2 + Bd*u(i) % x[n+1|n]
    ye2(i) = Cd*xe2;

    % Корректировка оценок по результатам измерения
    xe2 = xe2 + Mx*(yv(i)-Cd*xe2) % x[n] фильтра: x_e[n]=x[n-1]+Mx*(yv[n]-
C_d*x[n-1])

    %////////////////////////////////////
    % Вариант N3 с обновляемым M, опорный результат HELP > Kalman Filtering
    %////////////////////////////////////
    Mn = P*Cd'/(Cd*P*Cd'+R);
    x = x + Mn*(yv(i)-Cd*x); % x[n|n]
    P = (eye(3)-Mn*Cd)*P; % P[n|n]

    ye(i) = Cd*x;
    errcov(i) = Cd*P*Cd';

    % Time update
    x = Ad*x + Bd*u(i); % x[n+1|n]
    P = Ad*P*Ad' + Bd*Q*Bd'; % P[n+1|n]
end

figure(1)
subplot(211)
plot(t,ye,'b',t,ye1,'r--'),
legend('Вариант N1','Вариант N3','location','southeast')
grid
title('Оценка выхода объекта фильтром Калмана')

```

```

subplot(212)
plot(t, ye, 'b', t, ye2, 'r--'),
legend('Вариант N1', 'Вариант N2', 'location', 'southeast')
grid
xlabel('Номер дискретизации');
ylabel('ye[n]')

figure (2)
plot(t, errcov, 'b'),
grid
xlabel('Номер дискретизации');
ylabel('Cd*P*Cd')
title('Ковариация варианта N3')

```

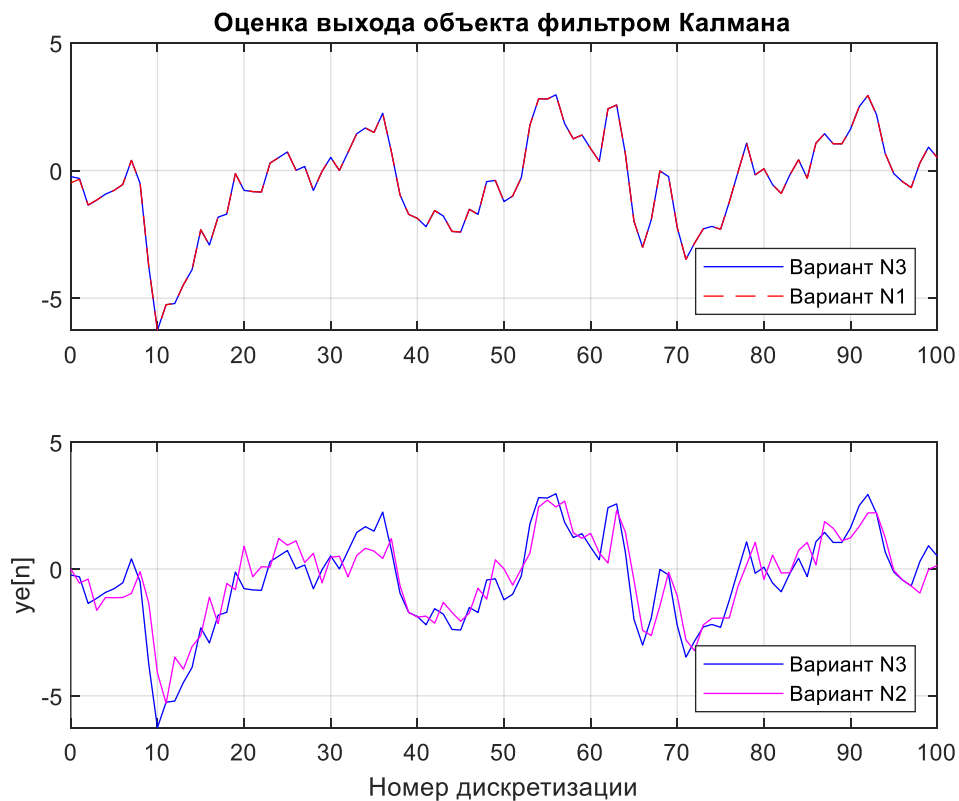


Рисунок 15. Сравнение вариантов реализации фильтра Калмана. В 1-ом и 2-ом варианте матрица фильтра M сосчитана заранее. В 3-ем опорном варианте матрица рассчитывается во время работы фильтра. Во втором (неправильном) варианте сначала выполняется стадия 2 (см. Рисунок 14) - расчет оценок, а, затем, их коррекция (стадия 1).

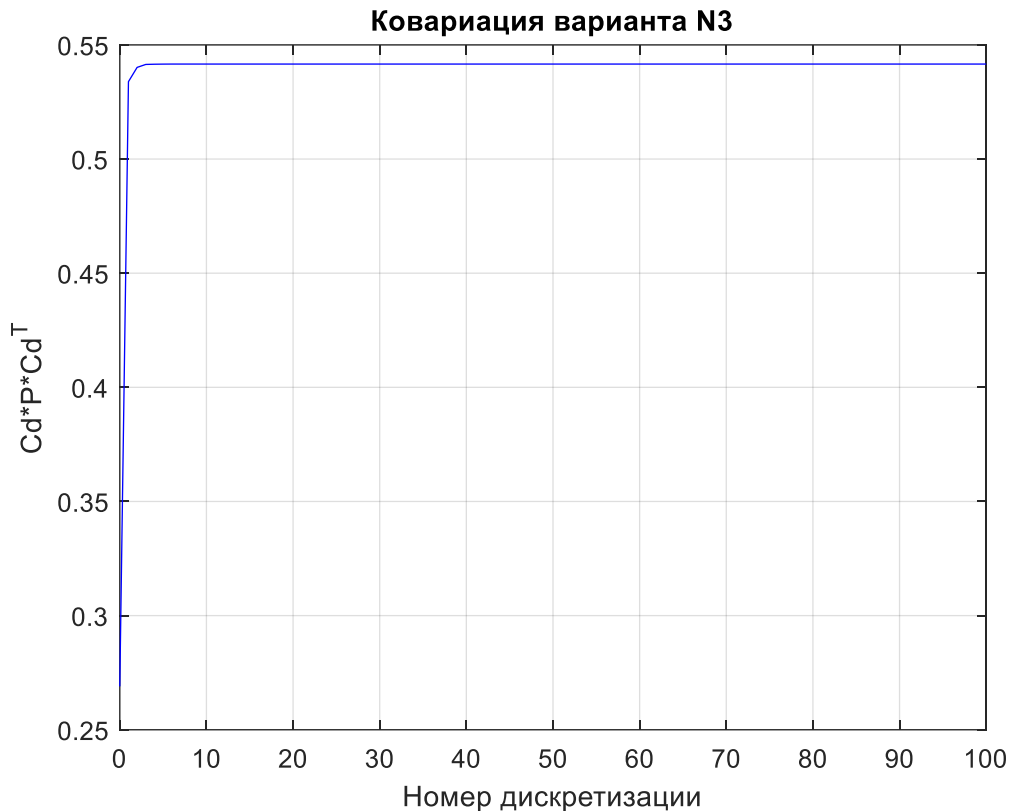


Рисунок 16. Проверка устойчивости вычислений по ковариационной функции $C_d P C_d^T$, где $P=X$ – решение уравнения Риккати.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены обобщенные и детальные варианты построения дискретного фильтра Калмана в среде MATLAB и интегрирование фильтра в систему управления с линейно-квадратичным регулятором. Фильтр Калмана отслеживает переменные состояния объекта по сигналам управления и реакции объекта, в условиях, когда шумы воздействуют на поведение объекта и измерение его реакции. Фильтр быстро находит значения переменных состояния объекта даже при значительном рассогласовании начальных условий объекта и фильтра. При обеспечении достаточной надежности и наличии шумов фильтр Калмана может заменить наблюдатель в системах управления с линейно-квадратичными регуляторами.

Не удалось рассмотреть детальный алгоритм MATLAB построения фильтра Калмана для неустойчивых объектов, поскольку он закрыт средствами р-файла. Но, с другой стороны, для неустойчивых объектов найден вариант последовательного решения уравнения Риккати и вычисления коэффициентов фильтра Кальмана, которые используются для построения фильтра.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание 1. Вычисление параметров дискретного фильтра Калмана для устойчивого объекта второго порядка.

Исходные данные для всех заданий: передаточная функция объекта $W_{o_tf_c} = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$; дисперсия гауссовского шума системы $Q = 2.3$; дисперсия шума в канале измерения выходного сигнала (шумы датчика) $R = 1.8$.

1. Введите исходные данные.

```
Wo_tf_c = tf([1],[1 0.5 1])
Wo_tf_c =
      1
-----
s^2 + 0.5 s + 1
Q = 2.3;
R = 1.8;
```

2. Постройте эквивалентную импульсную передаточную функцию с периодом дискретизации 0.1 с.

```
Wo_tf_d = c2d(Wo_tf_c,0.1)
Wo_tf_d =
0.004914 z + 0.004832
-----
z^2 - 1.941 z + 0.9512
```

3. Переведите импульсную модель в пространство состояний

```
Wo_ss_d = ss(Wo_tf_d)
Wo_ss_d =

A =
      x1      x2
x1    1.941  -0.9512
x2      1      0

B =
      u1
x1    0.125
x2      0

C =
      x1      x2
y1    0.03931  0.03866

D =
      u1
y1    0
```

Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time state-space model.

4. Выделите из структуры `Wo_ss_d` матрицы дискретной модели

```
Ad = Wo_ss_d.A;  
Bd = Wo_ss_d.B;  
Cd = Wo_ss_d.C;  
Dd = Wo_ss_d.D;
```

5. Вычислите параметры фильтра Калмана.

```
[kalmf, L, Xcd, Mx, Z, My] = kalman(Plant, Q, R)
```

```
kalmf =  
A =  
      x1_e    x2_e  
x1_e    1.897  -0.9948  
x2_e    0.957  -0.04228  
B =  
      u    y  
x1_e    0.125  1.127  
x2_e     0    1.094  
C =  
      x1_e    x2_e  
y_e     0.03603  0.03543  
x1_e     0.957  -0.04228  
x2_e    -0.04116  0.9595  
D =  
      u    y  
y_e     0    0.08347  
x1_e     0    1.094  
x2_e     0    1.047  
Input groups:  
      Name    Channels  
      KnownInput    1  
      Measurement    2  
Output groups:  
      Name    Channels  
      OutputEstimate    1  
      StateEstimate    2,3  
Sample time: unspecified  
Discrete-time state-space model.
```

```
L =  
      1.1275  
      1.0937  
Xcd =  
      15.6859  14.9181  
      14.9181  14.3808  
Mx =  
      1.0937  
      1.0470  
Z =  
      14.3808  13.6687  
      13.6687  13.1847  
My =  
      0.0835
```

Задание 2. Оценка параметров объекта.

1. Используя результаты задания 1 (матрицы пространства состояния A, B, C, D ; усиление L , M_x и M_u), блок-схему: Рисунок 1 и пример: Рисунок 5 постройте средствами Simulink модель “Объект – фильтр Калмана”.
2. Подайте на вход объекта и фильтра синусоидальный сигнал u управления.
3. Выведите на графопостроитель оценки переменных состояния и выходного сигналов объекта, вычисляемые фильтром Калмана.
4. Сравните полученные результаты с графиками Рисунок 6 и Рисунок 7.

Задание 3. Вычисление матрицы M фильтра Калмана методом последовательного приближения.

1. Используя программу представленную в одноименном разделе выше, найдите коэффициенты матрицы M фильтра Кальмана для объекта задания 1.
2. Сравните результат с матрицей M (п.5) вычисленной в задании 1.

Задание 4. Разработка модели системы управления с линейно-квадратичным гауссовским регулятором.

1. Используя пример раздела “Построение линейно – квадратичного (LQR) регулятора”, вычислите параметры регулятора для объекта задания 1.
2. Постройте Simulink модель системы управления объектом (задания 1) с линейно-квадратичным регулятором и фильтром Кальмана. Структура такой системы показана на Рисунок 10, а пример модели – на Рисунок 11.
3. Сравните реакции построенной модели с реакциями модели (Рисунок 11) показанными Рисунок 12.
4. Постройте Simulink модель системы управления объектом (задания 1) с линейно-квадратичным регулятором и фильтром Кальмана. Структура этого варианта системы показана на Рисунок 14.
5. Сравните работу систем управления, построенных в соответствии с заданиями п.2 и п.4. Пример такого сравнения показан ниже для объекта, используемого в разделе “Общие сведения.”

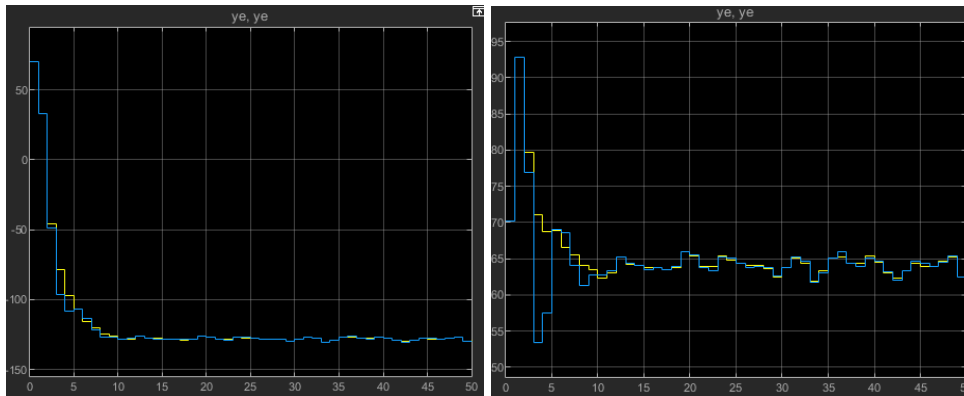


Рисунок 17. Сравнение реакций 2-х вариантов систем управления с фильтром Калмана для объекта, используемого в разделе “Общие сведения”. Вариант системы с усилением L обратной связи фильтра (желтые графики) обеспечивает лучшее сглаживание в сравнении с вариантом без L усиления (синие графики).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите области применения фильтра Калмана.
2. Какие средства MATLAB доступны для построения фильтра Калмана?
3. Чем отличаются реализации непрерывных и дискретных фильтров Калмана?
4. Почему разработка фильтра Калмана должна включать решение уравнения Риккати?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А.А.Алексеев, Д.Х.Имаев, Н.Н.Кузьмин, В.Б.Яковлев. Теория управления: Учеб./СПб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 1999. – 435 с.
2. Help MATLAB.
3. Википедия. Фильтр Калмана. https://ru.wikipedia.org/wiki/Фильтр_Калмана
4. Dr. Bob Davidov. Синтез наблюдателя состояний. <http://portalnp.ru/2021/01/10862>
5. Dr. Bob Davidov. Аналитическое конструирование линейно-квадратичного регулятора <http://portalnp.ru/2021/01/10857>
6. Dr. Bob Davidov. Компьютерные технологии управления в технических системах <http://portalnp.ru/author/bobdavidov>