

Синтез регулятора методом размещения корней характеристического полинома. Операторный метод

Цель работы: Изучить принцип построения регуляторов систем управления методом размещения корней.

Задача работы: Средствами MATLAB спроектировать регулятор, обеспечивающий желаемое размещение корней замкнутого контура системы управления.

Приборы и принадлежности: Персональный компьютер, интегрированная среда MATLAB.

Введение

Допустим, что требования к системе представлены в форме желаемого множества корней характеристического полинома. Необходимо найти алгоритм регулятора, размещающего корни (полюса характеристического полинома передаточной функции) в назначенных местах комплексной плоскости. В этой рассматривается реализация средствами MATLAB метода размещения корней, описанного в работе [1, стр. 139]

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Передаточная Функция (ПФ) равна отношению изображений по Лапласу переменных выхода $Y(s)$ и входа $F(s)$ при нулевых начальных условиях (1, стр. 43).

$$W(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}, \quad \begin{array}{c} F(s) \longrightarrow \boxed{W(s)} \longrightarrow Y(s) \end{array}$$

где изображения по Лапласу $Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$, $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$.

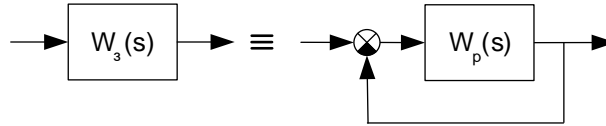
$$\text{В полиномиальной форме } W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad \begin{array}{c} F(s) \longrightarrow \boxed{\frac{B(s)}{A(s)}} \longrightarrow Y(s) \end{array}$$

где m и n – порядки полиномов числителя и знаменателя, соответственно.

Передаточная функция разомкнутой системы “регулятор – объект” равна

$$W_p(s) = W_R(s) * W_o(s) = \frac{B_R(s)}{A_R(s)} * \frac{B_o(s)}{A_o(s)}$$

Передаточную функцию замкнутой системы $W_3(s)$



можно найти из отношения

$$W_3(s) = \frac{B_3(s)}{A_3(s)} = \frac{W_p(s)}{1+W_p(s)} = \frac{W_R(s)W_o(s)}{1+W_R(s)W_o(s)} = \frac{B_R(s)B_o(s)}{A_R(s)A_o(s)+B_R(s)B_o(s)}$$

знаменатель которого - характеристический полином (ХП)

$$A_3(s) = A_R(s)A_o(s) + B_R(s)B_o(s).$$

порядок которого определяет порядок системы.

Полином $A_3(s)$ можно разбить на произведение простых сомножителей

$$A_3(s) = \prod_i (s - p_i),$$

где p_i – корни характеристического полинома.

Примечание: Корни характеристического уравнения, полюса передаточной функции и собственные числа матрицы системы в форме пространства состояния – это, по сути, одно и то же.

Если значения корней заданы, то построение соответствующего характеристического полинома замкнутого контура системы с объектом $B_o(s)$ и $A_o(s)$ сводится к нахождению коэффициентов полиномов числителя $B_R(s)$ и знаменателя $A_R(s)$ ПФ регулятора.

Степень полинома A_3 равна сумме степеней полиномов A_o и A_R т.е. порядок системы равен сумме порядков объекта n_o и регулятора n_r .

По условию реализуемости регулятора, степень полинома числителя $B_R(s)$ ПФ регулятора $W_R(s)$ не должна превышать степень полинома знаменателя $A_R(s)$, т.е.

$$m_R \leq n_R$$

Для соблюдения этого условия и решения задачи заданного размещения корней порядок регулятора должен быть

$$n_R = n_o - 1.$$

Задача размещения корней разрешима, если характеристика вход – выход объекта является полной.

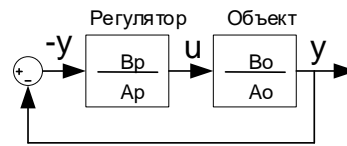
Последовательность расчета

Последовательность вычисления коэффициентов регулятора, обеспечивающего назначенное расположение корней системы управления, включает следующие шаги.

1. Объект проверяется на контролируемость и наблюдаемость.
2. По известной передаточной функции объекта выбирается структура регулятора. Порядок регулятора устанавливается на единицу меньше порядка объекта. По условию реализуемости регулятора порядок полинома числителя ПФ регулятора не должен превышать порядок регулятора.

3. Создается характеристический полином замкнутой системы “регулятор - объект” с неизвестными коэффициентами регулятора:

$$A_3 = A_R * A_o + B_R * B_o$$



4. По назначенным корням вычисляется желаемый характеристический полином замкнутой системы. Количество корней равно сумме порядков ПФ объекта и регулятора.

$$A_{ж} = \prod (s - p_{iж}) = a_{жn} s^n + a_{жn-1} s^{n-1} + \dots + a_{ж0}$$

5. Вычисляются коэффициенты регулятора, при которых $A_3 = A_{ж}$

Ниже предлагается собственная программа на языке MATLAB, которая вычисляет коэффициенты регулятора замкнутой системы управления для заранее назначенного распределения корней ХП. Результаты промежуточных вычислений показаны для объекта $W_o(s) = \frac{1}{s^2-1}$ и назначенного распределения корней $\{p\} = [-1, -2, -4]$, как и в примере 1 [1, стр. 141].

```
clear all

syms s % Назначение в символьном виде оператора 's' ПФ

% Объект
Wo = tf([1],[1 0 -1]) % ПФ неустойчивого объекта
Wo =
    1
    -----
    s^2 - 1
p_o = pole(Wo) % Полюса ПФ (корни) объекта
p_o =
    -1
     1
Wo_deg = length(p_o) % Порядок объекта
Wo_deg =
     2
Wo_ss = ss(Wo) % Структура объекта в формате пространства состояний
Wo_ss =
    A =
        x1  x2
    x1   0   1
    x2   1   0
    B =
        u1
    x1   1
    x2   0
    C =
        x1  x2
    y1   0   1
    D =
        u1
    y1   0
A = Wo_ss.A; B = Wo_ss.B; C = Wo_ss.C; %
```

```

% Проверка контролируемости
% Co = [B A*B A^2*B .. A^(n-1)*B]
Co = B
for i = 1:Wo_deg-1
    Co = [Co A^i*B]
End
    Co =
        1    0
        0    1
if ~(rank(Co) == Wo_deg) % Ранг матрицы Co не равен порядку системы?
    disp('////////////////////////////////////')
    disp('Объект неконтролируемый!')
    disp('////////////////////////////////////')
    return % выход из программы
end

% Проверка наблюдаемости.
Ob = C
for i = 1:Wo_deg-1
    Ob = [Ob; C*A^i]
end
    Ob =
        0    1
        1    0
if ~(rank(Ob) == Wo_deg) % Ранг матрицы Ob не равен порядку системы?
    zpk(Wo) % разложение ПФ на простейшие сомножители
    disp('////////////////////////////////////')
    disp('Нет решения! Объект не полностью наблюдаем.')
    disp('Вектор состояния объекта не может быть вычислен')
    disp('по измеренным векторам входа и выхода и матрицам системы')
    disp('////////////////////////////////////')
    return % выход из программы
end

[num_o den_o] = tfdata(Wo, 'v') % полиномы числителя и знаменателя ПФ
разомкнутого контура СУ
    num_o =
        0    0    1
    den_o =
        1    0   -1
B_o = poly2sym(num_o,s) % полином числителя объекта
B_o =
    1
A_o = poly2sym(den_o,s) % полином знаменателя объекта
A_o =
    s^2 - 1

Wr_deg = Wo_deg-1; % порядок регулятора

syms a b [1 Wr_deg] % коэффициенты B (числителя) и A (знаменателя) полиномов
ПФ регулятора
syms b0 a0

```

```

% Полиномы А и В ПФ регулятора
B_r = 0; A_r = 0;
for i = 1:Wr_deg
    B_r = B_r + b(i)*s^(i);
    if ~(i==Wr_deg)
        A_r = A_r + a(i)*s^(i);
    else
        A_r = A_r + s^(i);
    end
end
B_r = B_r + b0
    B_r =
    b0 + b1*s
A_r = A_r + a0
    A_r =
    a0 + s

% XII замкнутой системы "Регулятор - Объект"
A = A_r * A_o + B_r * B_o
    A =
    b0 + b1*s + (s^2 - 1)*(a0 + s)
A = collect(A) % сортировка по степени s
    A =
    s^3 + a0*s^2 + (b1 - 1)*s - a0 + b0
n_AA = Wo_deg + Wr_deg % порядок ХР
    n_AA =
    3
AA = zeros(n_AA,n_AA)
    AA =
    0    0    0
    0    0    0
    0    0    0
BB = zeros(n_AA,1)
    BB =
    0
    0
    0
Ca = coeffs(A,s) % выделение коэффициентов полинома
    Ca =
    [ b0 - a0, b1 - 1, a0, 1]

C_un = [a0 a(1:end-1) b0 b] % вектор неизвестных параметров регулятора
    C_un =
    [ a0, b0, b1]
for i = 1:n_AA
    [v,nm] = coeffs(Ca(i)) % значения и имена неизвестных коэффициентов и
свободных членов
    for j = 1:length(C_un)
        var = find(nm == C_un(j))
        if ~isempty(var)
            AA(i,j) = v(var)
        end
    end
end
if strcmp(class(eval(nm(end))), 'double')
    BB(i) = v(end)
end
end
end

```

```

AA =
    -1     1     0
     0     0     1
     1     0     0
BB =
     0
    -1
     0

% Назначенный ХР замкнутой системы "Регулятор - Объект"
%%%%%%%%%%%% INPUT %%%%%%%%%%%%%
p_n = [-1 -2 -4]; % Назначенные корни полинома
%%%%%%%%%%%% END of INPUT %%%%%%%%%%%%%

An_p = poly(p_n) % коэффициенты полинома
An_p =
     1     7    14     8
An = poly2sym(An_p,s) % полином в символьном виде
An =
    s^3 + 7*s^2 + 14*s + 8

% Проверка степени назначенного полинома
if ~(length(p_n) == length(den_o)-1 + Wr_deg)

disp('////////////////////////////////////.////////////////////////////////////')
disp('Количество назначенных корней не равно сумме порядков регулятора и
объекта!')
disp('ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕРВАНЫ')

disp('////////////////////////////////////')
return % выход из программы
end

% Варианты решения системы линейных уравнений AA*x = BB,
% где x - коэффициенты регулятора
BB = flip(An_p(2:end))'-(BB)
BB =
     8
    15
     7
det(AA) % не должен равняться нулю
ans =
     1
if det(AA)== 0
disp('////////////////////////////////////')
disp('НЕТ РЕШЕНИЯ! Детерминант матрицы AA равен нулю.')
disp('////////////////////////////////////')
return % выход из программы
end

% Метод обратной матрицы
x = inv(AA)*BB
x =
     7
    15
    15

```

```

% Метод Гаусса
x = AA\BB % для квадратной матрицы A
x =
    7
   15
   15

% Стандартная функция linsolve()
x = linsolve(AA,BB)
x =
    7
   15
   15

% ПФ регулятора
Wr = tf([flip(x(end-Wr_deg:end))'],[1 flip(x(1:Wr_deg))'])
Wr =
    15 s + 15
    -----
    s + 7

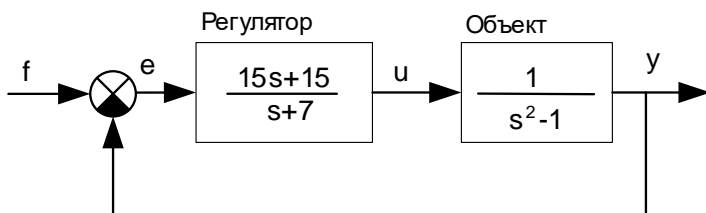
% Проверка
W1 = Wr*Wo % ПФ разомкнутого контура
W1 =
    15 s + 15
    -----
    s^3 + 7 s^2 - s - 7
W = feedback(W1,1) % ПФ замкнутого контура
W =
    15 s + 15
    -----
    s^3 + 7 s^2 + 14 s + 8
eig(W) % корни построенной системы управления
ans =
   -4.0000
   -2.0000
   -1.0000
pole(W) % корни построенной системы управления
ans =
   -4.0000
   -2.0000
   -1.0000

% конец программы

```

////////////////////////////////////

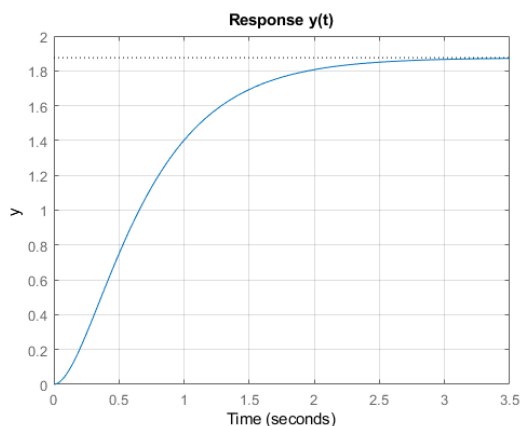
ПР вычисленного регулятора равна $W_r(s) = \frac{b1(s)+b0}{s+a0} = \frac{15(s)+15}{s+7}$. Замкнутая СУ “регулятор – объект” с назначенными корнями ХП $\{p\} = [-1, -2, -4]$:



$$W(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{15(s+1)}{s^3+7s^2+14s+8}$$

Реакция системы на ступенчатое воздействие:

```
step(W)
grid
xlabel('Time');
ylabel('y');
title('Response y(t)')
```



ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание 1. Конструирование регулятора по назначенным корням ХП.

1. Используя описание операторного метода размещения корней характеристического полинома [1, стр. 139] и коды MATLAB программы раздела “ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ” настоящего документа найдите коэффициенты регулятора для объекта $W_0(s) = \frac{s+6}{s^3+2s^2-1}$. Назначьте корни замкнутой системы, так, чтобы левый корень объекта остался на месте. Количество назначаемых корней должно соответствовать порядкам объекта и регулятора.
2. По методике предыдущего пункта найдите коэффициенты регулятора для объекта $W_0(s) = \frac{s+2}{s^2+s-2}$. Назначьте корни замкнутой системы. Выясните, почему программа не имеет решения?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие регуляторы можно создавать рассмотренным методом размещения корней характеристического полинома?
2. Почему метод не работает для не полностью наблюдаемых объектов?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А.А.Алексеев, Д.Х.Имаев, Н.Н.Кузьмин, В.Б.Яковлев. Теория управления: Учеб./СПб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 1999. – 435 с.
2. Help MATLAB.
3. Dr. Bob Davidov. Компьютерные технологии управления в технических системах. <http://portalnp.ru/author/bobdavidov>