Dr Bob Davidov

Синтез наблюдателя состояний

Цель работы: Изучить принцип построения и настройки наблюдателя переменных состояния объекта системы управления.

Задача работы: Средствами MATLAB спроектировать наблюдатель, отслеживающий состояние объекта.

Приборы и принадлежности: Персональный компьютер, интегрированная среда MATLAB.

Введение

Наблюдатель, который по реакции системы управления вычисляет текущие значения переменных состояния объекта, необходим при построении регуляторов, например, линейно-квадратичных ([2], [3]), когда не все используемые регуляторами переменные могут быть измерены непосредственно. В этой работе рассматриваются вопросы синтеза наблюдателя состояний в интегрированной среде MATLAB.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Линейно-квадратичные регуляторы [2], [3] формируют управляющее воздействие на объект по значениям вектора состояния. В случаях, когда не все переменные состояния могут быть измерены непосредственно, необходим наблюдатель, который вычисляет эти переменные. Вычисление всех переменных состояния по переменной выхода возможно, если объект наблюдаем полностью. Это требование эквивалентно условию равенства ранга матрицы наблюдаемости

$O_b = [C;\ CA\ CA^2 \dots\ CA^{n-1}]$ порядку системы n, т.е. когда $rank(O_b) = size(A, 1)$,

где C и A – матрицы системы в форме пространства состояний.

В MATLAB матрицу наблюдаемости C_o можно найти функцией obsv(A, B) или obsv(SYS), где SYS – модель в форме пространства состояний.

Для оценки вектора состояния в систему включают модель наблюдателя, внутри которого находится модель объекта управления. Наблюдатель состояния (Рисунок 1) подстраивает собственную модель объекта через обратную связь L по отклонению δy выхода модели наблюдателя $\hat{y}$ от выхода объекта y [1, стр. 148].

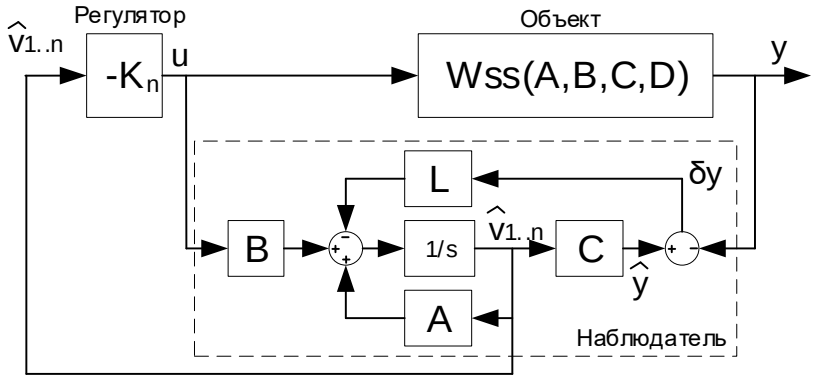


Рисунок 1. Система с наблюдателем состояния.

При наличии наблюдателя, регулятору не нужны производные выходных координат объекта. Регулятор формирует управляющее воздействие на объект по оценкам вектора состояния $u = -K\hat{v}$. Оценка $\hat{v}$ вектора состояния может отличается от состояния v объекта из-за различия начальных условий, действующих на объект возмущений, а также неточности описания объекта. Однако при правильном выборе матрицы обратной связи наблюдателя L оценка переменных состояния $\hat{v}$ модели объекта наблюдателя должна асимптотически стремиться к состоянию v реального объекта.

Матрицу L наблюдателя можно найти теми же методами, что и матрицу K регулятора, если вместо пары матриц (A, B) принять пару (A^T, C^T).

При назначении желаемых собственных значений системы с наблюдателем необходимо стремиться к большему быстродействию контура наблюдателя (*назначать собственные значения наблюдателя значительно дальше от мнимой оси, чем собственные значения системы без наблюдателя*). В рассматриваемом ниже примере собственные значения контура “регулятора-объект” равны [-1 -2], тогда как назначенная пара собственных значений контура наблюдателя с моделью объекта равна [-10 -20].

Предлагаемая последовательность синтеза регулятора и наблюдателя методом размещения корней включает:

1. Назначение собственных значений (корней) замкнутого контура “регулятор + объект”.
2. Вычисление коэффициентов K регулятора, обеспечивающего назначенные корни системы управления “регулятор + объект”.
3. Назначение собственных значений характеристического полинома контура наблюдателя для того же объекта.
4. Вычисление коэффициентов L наблюдателя, обеспечивающего назначенные собственные значения замкнутого контура наблюдателя.
5. Построение модели замкнутой системы “наблюдатель – регулятор - объект”
6. Построение системы управления с наблюдателем состояния.

Назначение собственных значений (корней) замкнутого контура “регулятор + объект”

Метод размещения собственных значений матрицы дифференциальных уравнений в форме пространства состояний описан в [15, стр. 143]. Этим методом можно найти коэффициенты полинома регулятора, который обеспечивает назначенное размещение корней контура системы управления “регулятор - объект” Рисунок 2. Регулятор не использует операцию дифференцирования, он формирует управляющие воздействия по измеренным значениям

производной выходного сигнала или смоделированным значениям переменных состояний объекта.

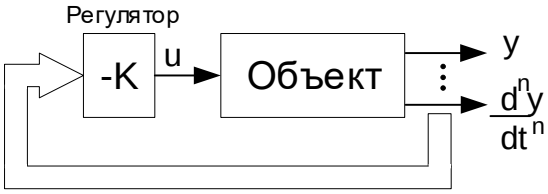


Рисунок 2. Контур системы управления “регулятор объект”. Регулятор формирует воздействия по измеренным сигналам или использует смоделированные наблюдателем переменные состояния.

В MATLAB коэффициенты рассматриваемого регулятора можно найти при помощи функции

K = place(Ao, Bo, Pr),

где Ao и Bo матрицы формы пространства состояний объекта (см. Рисунок 3); Pr – вектор назначаемых корней замкнутой системы управления.

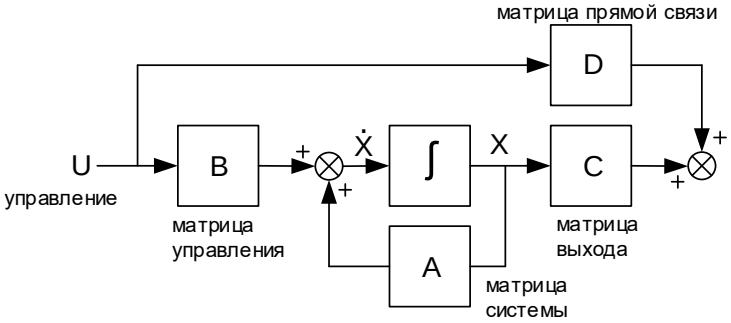


Рисунок 3. Модель системы в форме пространства состояния.

По модели Рисунок 3 можно построить соответствующую систему дифференциальных уравнений, а, затем, из системы уравнений выделить матрицы пространства состояний.

Для примера, построим в MATLAB модель маятника в верхнем положении [15, стр. 141].

Система дифференциальных уравнений $\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$, описывающая поведение этого маятника, равна:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0\,x_1 + 1x_2 + 1u \\ \frac{dx_2}{dt} = 1\,x_1 + 0x_2 + 0u \\ y = 0\,x_1 + 1x_2 + 0u \end{cases}$$

откуда

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [0\ 1]$, $D = [0]$. Варианты построения модели маятника в среде Simulink показаны на Рисунок 4.

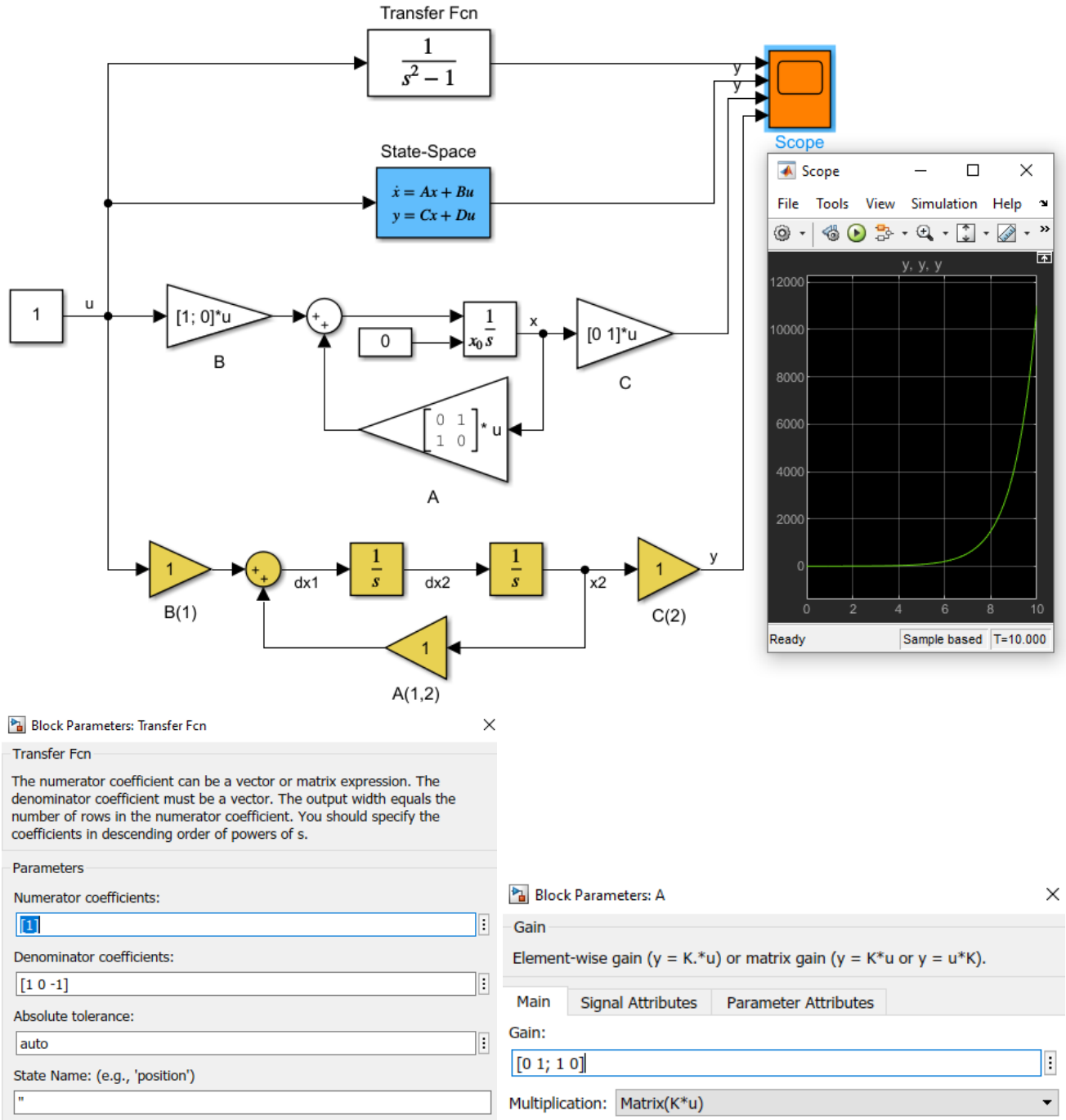


Рисунок 4. Четыре варианта моделирования объекта $W_o = \frac{1}{s^2-1}$.

Передаточная функция (ПФ) объекта $W_o = \frac{1}{s^2-1}$ вычисляется в MATLAB как

```
A = [0 1; 1 0]; B = [1; 0]; C = [0 1]; D = [0];
Wo = tf(ss(A,B,C,D)) % ПФ объекта
      Wo =
            1
         -------
         s^2 - 1
```

Полюса ПФ (ее корни):

```
eig(Wo)  % корни объекта
         -1
          1
```

Вычисление коэффициентов регулятора, обеспечивающего назначенные корни системы управления “регулятор - объект”

Корни неустойчивого объекта $Po(1) = -1$; и $Po(2) = +1$. Назначим желаемые корни [15] замкнутого контура “регулятор - объект”: $Pr(1) = -1$; и $Pr(2) = -2$, таким образом, левый корень характеристического полинома объекта (равный -1) оставили на месте.

Вычислим коэффициенты регулятора обеспечивающего назначенное распределение корней контура. Проверим корни контура.

```
K = place(Ao, Bo, Pr) % Коэффициенты регулятора
      K =
          3.0000    3.0000
Wro = tf(flip(K),poly(Pr)) % ПФ замкнутого контура “регулятор – объект”
           3 s + 3
        -------------
        s^2 + 3 s + 2
eig(Wro)  % корни замкнутого контура
          -2
          -1
```

Полюса ПФ замкнутого контура “регулятор - объект” совпадают с назначенными значениями корней. Контур устойчив – два левых корня [-1, -2]. Модель контура регулятора и реакция на ступенчатое воздействие показаны на Рисунок 5.

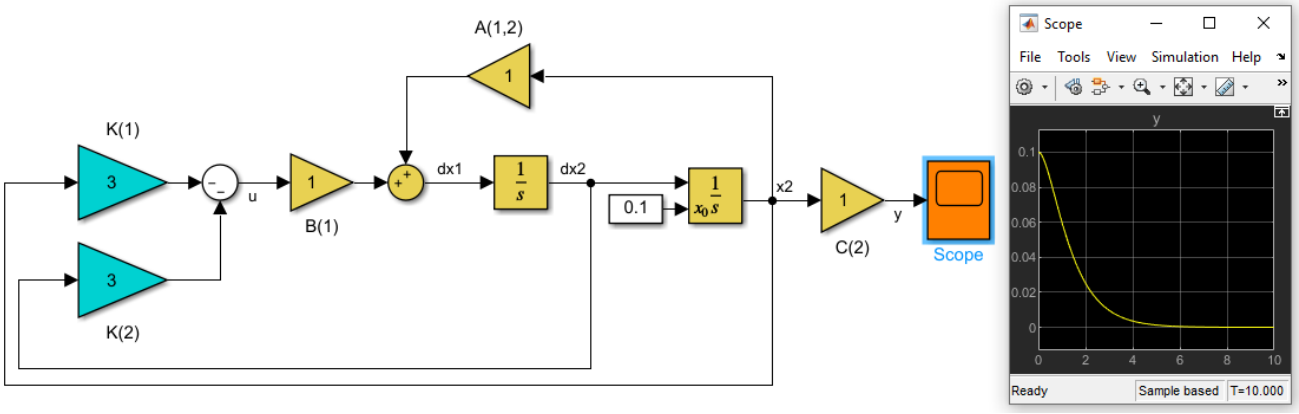


Рисунок 5. Модель системы управления “регулятор - объект”. Начальное состояние переменной x2 = 0,1. Регулятор выводит объект в 5% зону нулевого положения за 3.68 с.

Назначение корней характеристического полинома контура наблюдателя

Необходимо стремиться к большему быстродействию контура наблюдателя (назначать корни контура наблюдателя дальше от мнимой оси) в сравнении с контуром регулятора [15]. Примем $Pn(1) = -10$; и $Pn(2) = -20$.

Вычисление коэффициентов L наблюдателя, обеспечивающего назначенные корни системы управления

Задача синтеза наблюдателя – определение матрицы L - является дуальной по отношению к задаче синтеза регулятора – определения матрицы K. Поэтому матрицу наблюдателя L можно найти теми же методами, если вместо пары матриц (A,B) принять пару (A^T,C^T) [15].

Для вычисления матрицы L воспользуемся той же командой MATLAB, как и для вычисления матрицы K:

L = **place**(Ao', Co', Pn)

```
Pn = [-10 -20]; % назначенные собственные значения замкнутого контура
наблюдателя
L = place(Ao', Co', Pn) % Коэффициенты матрицы L наблюдателя,
обеспечивающие назначенные корни
      L =
        201.0000   30.0000
Wn = tf(flip(L),poly(Pn)) % Передаточная функция замкнутого контура
наблюдателя
      Wn =
          30 s + 201
        ----------------
        s^2 + 30 s + 200
eig(Wn)  % корни контура наблюдателя
         -20
         -10
```

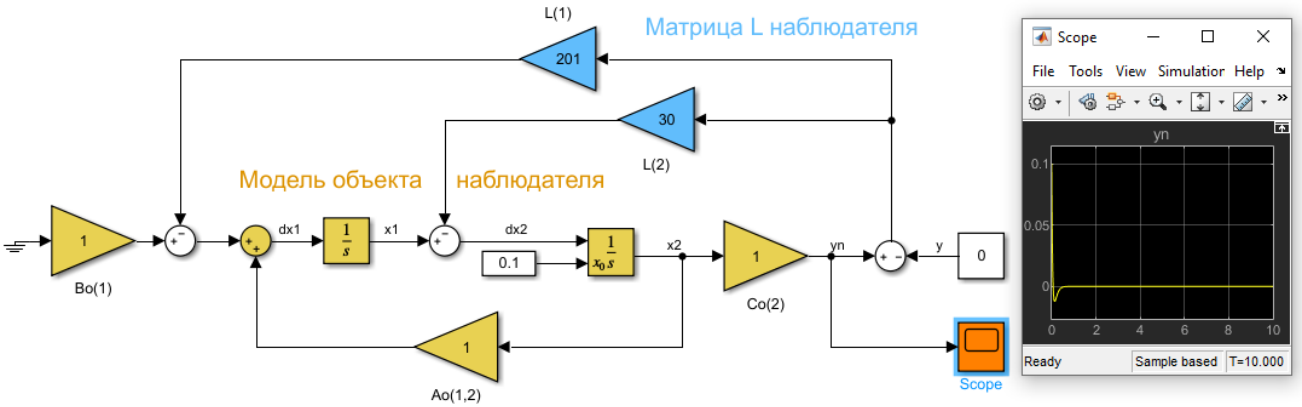


Рисунок 6. Контур наблюдателя. Начальное состояние переменной x2 = 0,1. Наблюдатель выводит систему в 5% зону нулевого положения за 0.28 с.

Построение модели замкнутой системы “наблюдатель – регулятор -объект”

Наблюдатель вместе с регулятором состояния образуют динамический регулятор, входом которого является выход объекта, а выходом – управляющее воздействие на объект (Рисунок 7).

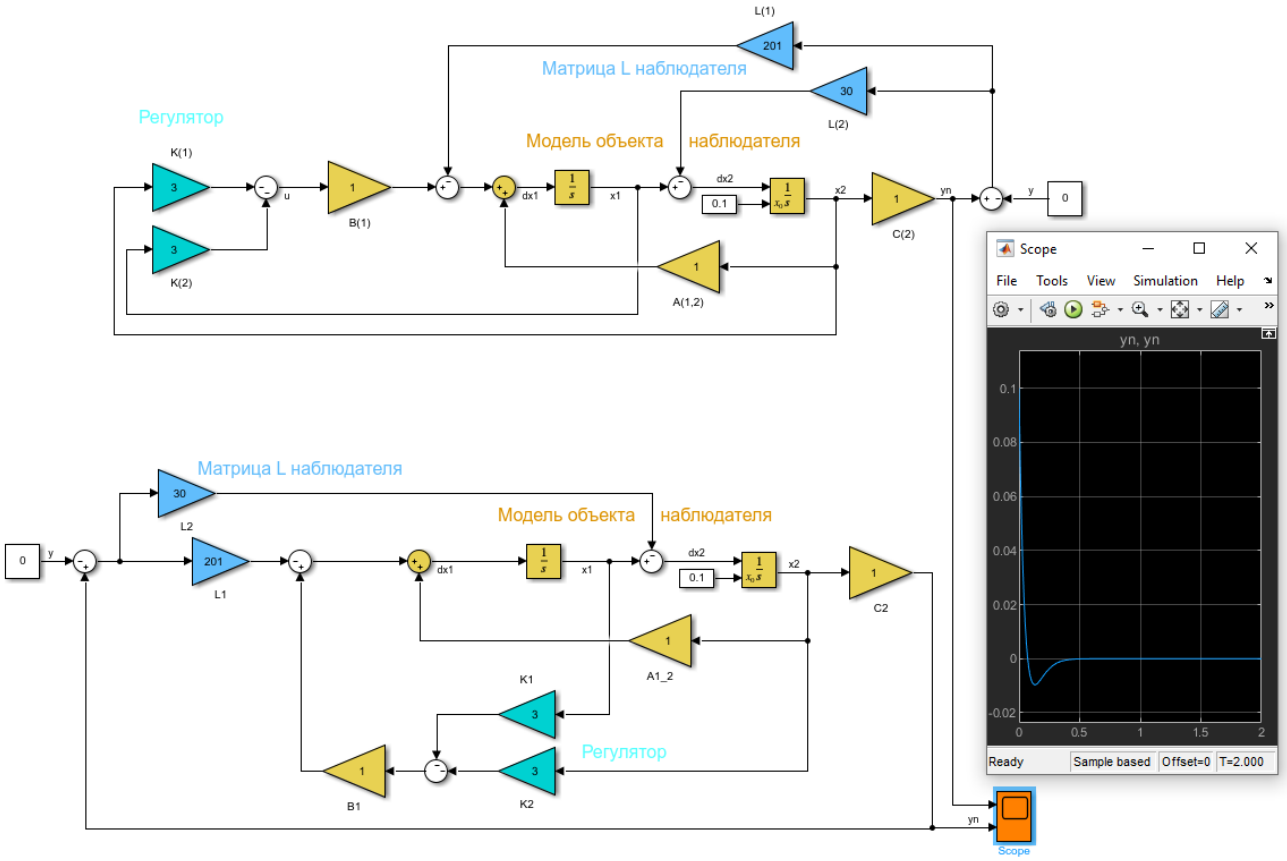


Рисунок 7. Два варианта размещения блоков наблюдателя с регулятором состояния со входами справа (блок-схема вверху) и слева (внизу). Начальное состояние переменной x2 = 0,1. Контур выводит систему в 5% зону нулевого положения за 0.22 с.

Передаточную функцию наблюдателя с регулятором состояния можно вычислить по схеме Рисунок 7 в следующей последовательности.

- Создается система дифференциальных уравнений наблюдателя с регулятором состояний $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_{nr}x(t) + B_{nr}u(t) \\ y(t) = C_{nr}x(t) + D_{nr}u(t) \end{cases}$.
- Выделяются матрицы Anr, B nr, C nr, D nr, содержащие коэффициенты матриц A и B объекта, матрицы K регулятора и матрицы L наблюдателя.

```
syms b1 b2 c1 c2 l1 l2 k1 k2 a11 a12 a21 a22
Anr = [a11 a12; a21 a22] - [b1; b2]*[k1 k2] - [l1; l2]*[c1 c2]
      Anr =
      [ a11 - b1*k1 - c1*l1, a12 - b1*k2 - c2*l1]
      [ a21 - b2*k1 - c1*l2, a22 - b2*k2 - c2*l2]
Bnr = [-l1; -l2]
Cnr = [-k1 -k2]
Dnr = 0
```

- Оператором MATLAB **ss**(Anr, B nr, C nr, D nr) создается структура модели в форме пространства состояний
- Модель пространства состояний переводится в модель передаточной функции командой **tf**.

```
Anr = Ao - Bo*K - L'*Co
      Anr =
         -3.0000 -203.0000
          1.0000  -30.0000
Bnr = [-L(1); -L(2)]
      Bnr =
       -201.0000
        -30.0000
Cnr = [-K(1) -K(2)]
      Cnr =
         -3.0000   -3.0000
Dnr = [0]
      Dnr =
           0
Wnr = tf(ss(Anr,Bnr,Cnr,Dnr))
      Wnr =
          693 s + 693
        ----------------
        s^2 + 33 s + 293
```

Построение системы управления с наблюдателем состояния

Система управления неустойчивым объектом $W_o = \frac{1}{s^2-1}$ показана на Рисунок 5. Структура системе соответствует структуре Рисунок 1 с регулятором и наблюдателем состояния.

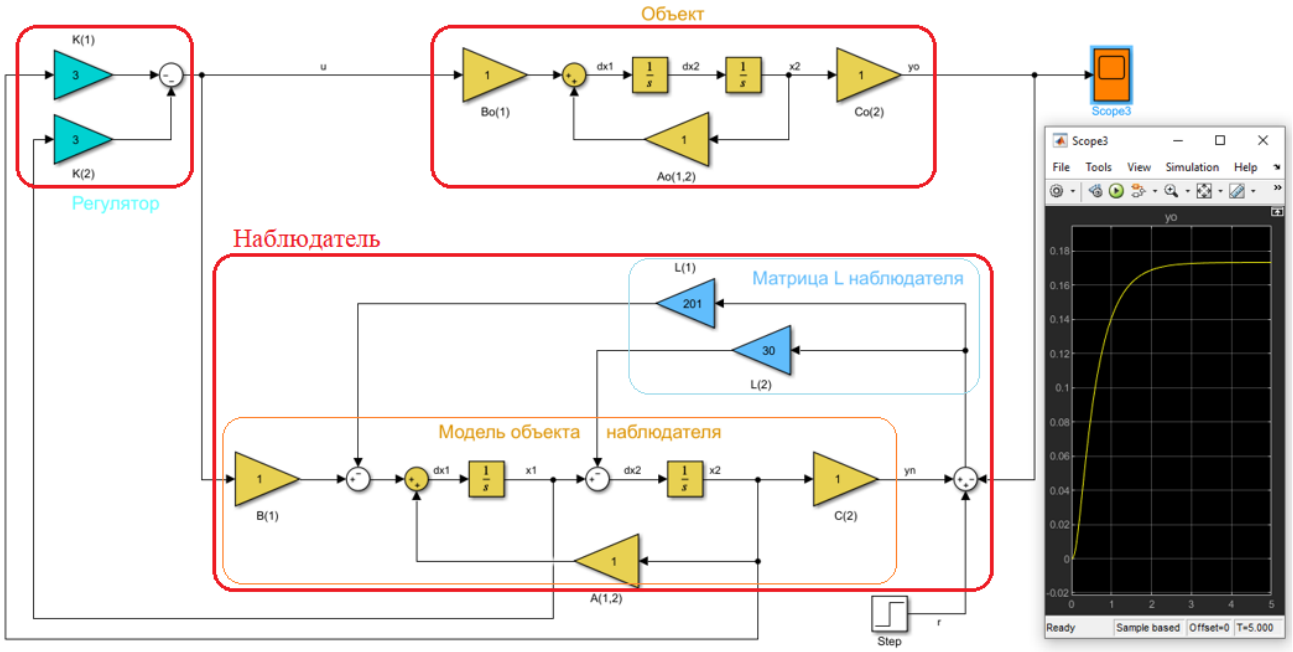


Рисунок 8. Система управления с регулятором и наблюдателем состояния.

Передаточная функция разомкнутой системы равна произведению ПФ наблюдателя с регулятором и ПФ объекта:

```
Wnro = Wnr*Wo % ПФ разомкнутого контура

      Wnro =

                  693 s + 693
        -----------------------------------
        s^4 + 33 s^3 + 292 s^2 - 33 s - 293
```

Передаточная функция замкнутой системы управления:

```
W = feedback(Wnro,1) % ПФ замкнутого контура системы управления
      W =
                  693 s + 693
        -------------------------------------
        s^4 + 33 s^3 + 292 s^2 + 660 s + 400
```

Матрицы модели системы управления в форме пространства состояний:

```
ss(W)
  A =
            x1      x2      x3      x4
   x1      -33  -18.25  -5.156  -1.562
   x2       16       0       0       0
   x3        0       8       0       0
   x4        0       0       2       0
  B =
       u1
   x1   4
   x2   0
   x3   0
   x4   0
  C =
            x1      x2      x3      x4
   y1        0       0   1.354  0.6768
  D =
       u1
   y1   0
```

Варианты моделей системы управления в виде ПФ и в форме пространства состояний показаны на Рисунок 9.

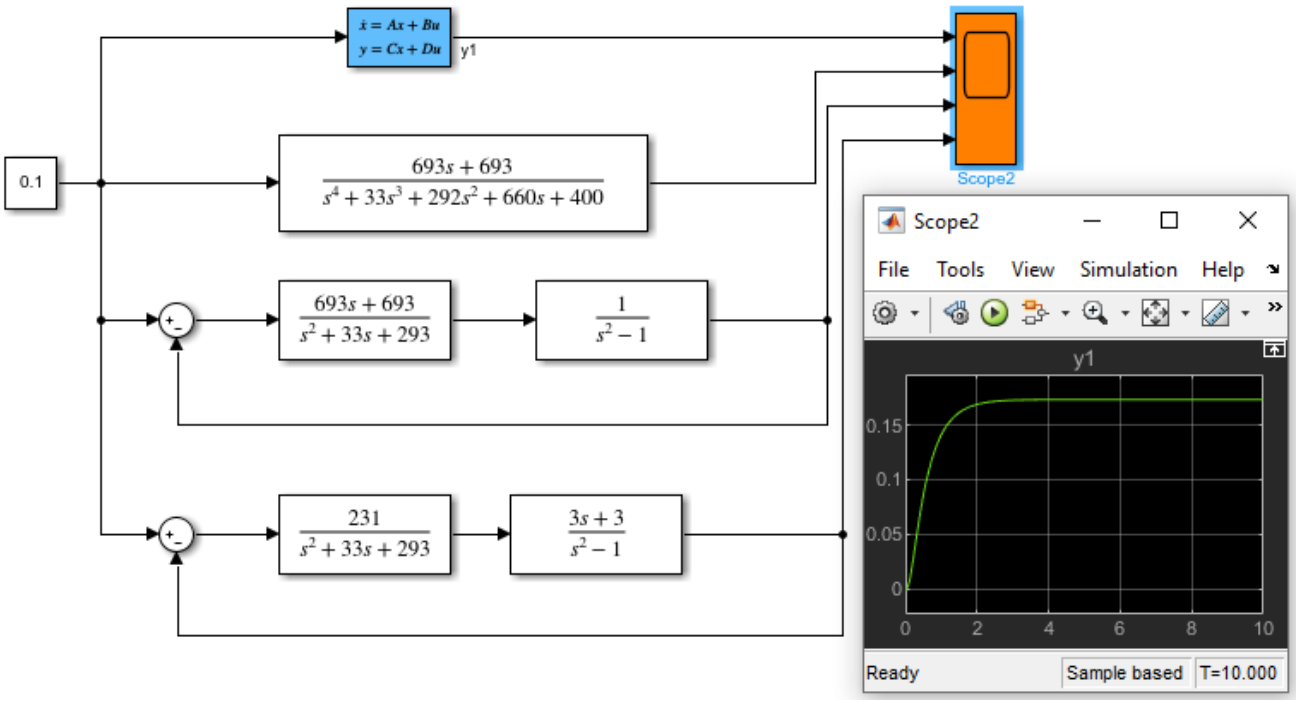


Рисунок 9. Варианты замкнутой системы управления в виде передаточных функций и матриц переменных состояния. Справа показан график реакции на ступенчатое воздействие. Время входа в 5% зону составляет 1.66 с.

Корни устойчивой системы управления неустойчивым объектом:

```
eig(W)
        -20.0000
        -10.0000
         -2.0000
         -1.0000
```

Значения левых корней [-1 -2 -10 -20] системы управления равны назначенным корням контура регулятора [-1 -2] и контура наблюдателя [-10 -20].

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание 1. Конструирование регулятора с наблюдателем методом размещения корней для управления неустойчивым объектом $W_o = \frac{s+2}{s^2+0.5s-1}$.

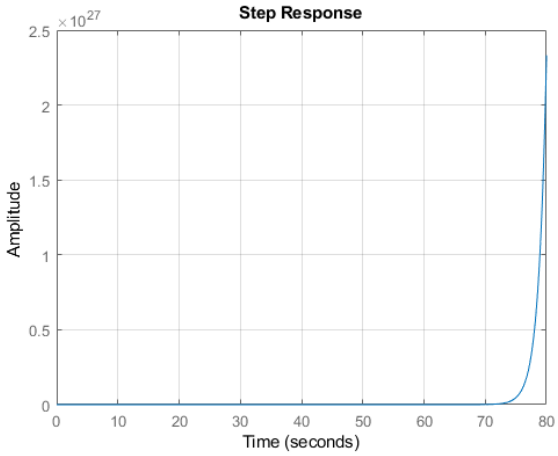
1. Найдите корни (полюса) ПФ объекта.

```
Wo = tf([1 2] ,[1 0.5 -1]) % ПФ объекта
   Wo =
          s + 2
     ---------------
     s^2 + 0.5 s - 1
eig(Wo)  % корни объекта
   -1.2808
    0.7808
pole(Wo)  % полюса (корни) ПФ объекта
```

```
  -1.2808
   0.7808
```

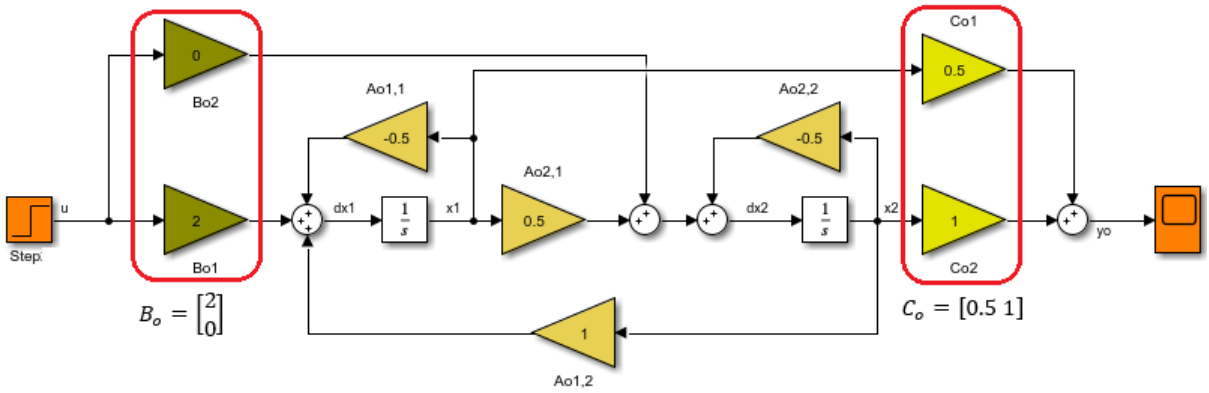
2. Постройте реакцию объекта на единичное воздействие

```
step(Wo) % реакция на ступенчатое воздействие
grid
```



3. Постройте модель объекта в Simulink.

```
Wo_ss = ss(Wo) % модель объекта в форме пространства состояний
  Wo_ss =
    A =
            x1     x2
     x1   -0.5      1
     x2      1      0
    B =
         u1
     x1   2
     x2   0
    C =
           x1    x2
     y1   0.5     1
    D =
         u1
     y1   0
```



4. Методом размещения корней замкнутой системы “регулятор-объект” найдите коэффициенты регулятора. Один из корней назначьте равным корню объекта. Проверьте корни замкнутой системы.

```
Pr = [-1.28 -2]; % корни замкнутого контура "регулятор - объект"
Ao = Wo_ss.A; Bo = Wo_ss.B; Co = Wo_ss.C; % Выделение матриц модели
пространства состояний
K = place(Ao, Bo, Pr) % Коэффициенты регулятора, обеспечивающие назначенные
корни
   K =
       1.3900    1.7800
Wro = tf(flip(K),poly(Pr)) % ПФ замкнутого контура “регулятор – объект”
   Wro =
        1.78 s + 1.39
     -------------------
     s^2 + 3.28 s + 2.56
eig(Wro)  % корни замкнутого контура
      -2.0000
      -1.2800
pole(Wro) % полюса (корни) замкнутого контура
      -2.0000
      -1.2800
```

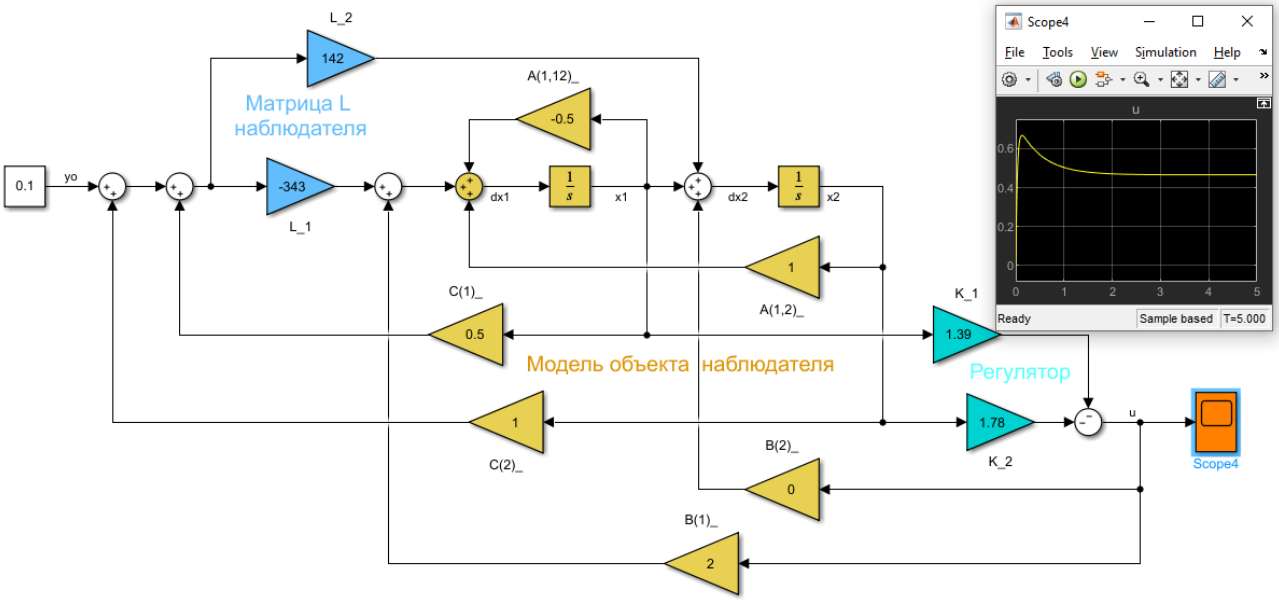
5. Методом размещения корней найдите коэффициенты наблюдателя. Назначаемые корни замкнутой системы наблюдателя должны быть расположены значительно дальше от мнимой оси чем собственные значения системы “регулятор-объект”. Проверьте корни замкнутой системы наблюдателя.

```
Pn = [-10 -20]; % назначенные собственные значения замкнутого контура
наблюдателя
L = place(Ao', Co', Pn) % Коэффициенты матрицы L наблюдателя, обеспечивающие
назначенные корни
   L =
     343.0000 -142.0000
Wn = tf(flip(L),poly(Pn)) % Передаточная функция замкнутого контура
наблюдателя
       -142 s + 343
     ----------------
     s^2 + 30 s + 200
eig(Wn)  % корни контура регулятора
      -20
      -10
```

6. В Simulink постройте модель регулятора с наблюдателем, содержащим модель объекта.

```
Anr = Ao - Bo*K - L'*Co
   Anr =
    -174.7800 -345.5600
      72.0000  142.0000
Bnr = [-L(1); -L(2)]
   Bnr =
    -343.0000
     142.0000
Cnr = [-K(1) -K(2)]
   Cnr =
      -1.3900   -1.7800
Dnr = [0]
   Dnr =
        0
Wnr = tf(ss(Anr,Bnr,Cnr,Dnr))
   Wnr =
         224 s + 286.8
     ---------------------
     s^2 + 32.78 s + 61.56
```

$$\frac{224s + 286.8}{s^2 + 32.78s + 61.56}$$



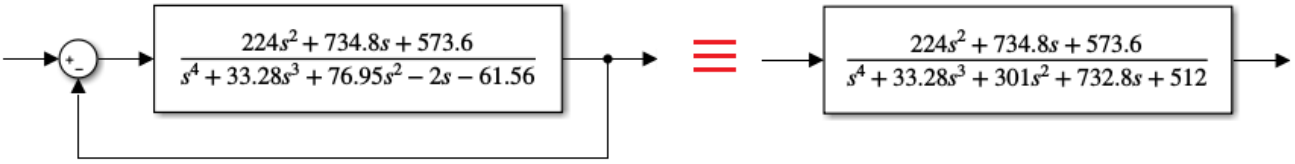
7. Добавьте ПФ объекта.

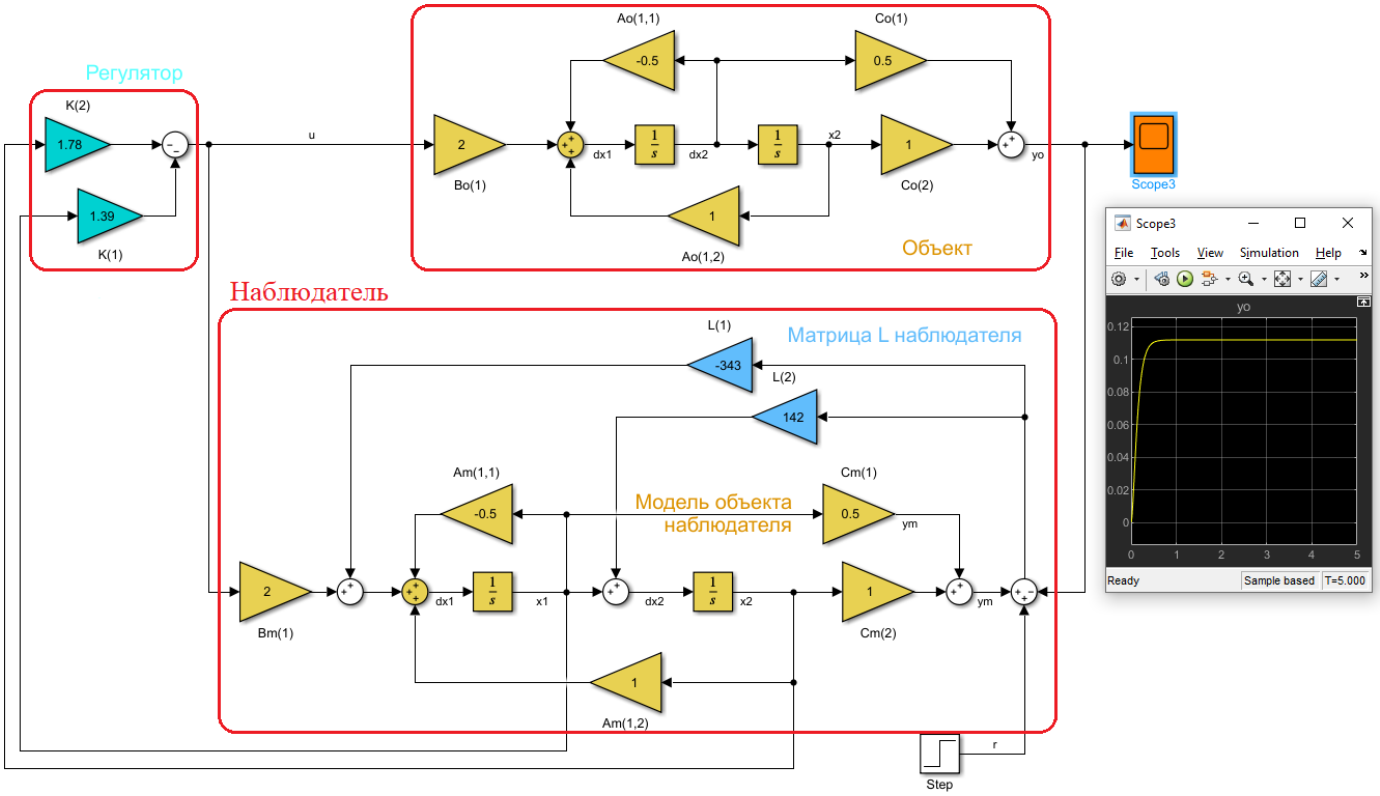
```
Wnro = Wnr*Wo
   Wnro =
              224 s^2 + 734.8 s + 573.6
     ----------------------------------------
     s^4 + 33.28 s^3 + 76.95 s^2 - 2 s - 61.56
```

$$\frac{224s + 286.8}{s^2 + 32.78s + 61.56} \quad \frac{s+2}{s^2 + 0.5s - 1} \equiv \frac{224s^2 + 734.8s + 573.6}{s^4 + 33.28s^3 + 76.95s^2 - 2s - 61.56}$$

8. Замкните систему, постройте систему управления “наблюдатель - регулятор – объект”. Сравните детальную Simulink модель с обобщенной структурной схемой Рисунок 1.

```
W = feedback(Wnro,1)
             224 s^2 + 734.8 s + 573.6
  ----------------------------------------
  s^4 + 33.28 s^3 + 301 s^2 + 732.8 s + 512
```





9. Найдите корни замкнутой системы и сравните с назначенными корнями контура регулятора и контура наблюдателя.

```
eig(W)

  -20.0000
  -10.0000
   -2.0000
   -1.2800
```

10. Постройте матрицы пространства состояний замкнутой системы управления.

```
ss(W)
    A =
              x1       x2       x3       x4
    x1    -33.28   -18.81   -5.725       -2
    x2        16        0        0        0
    x3         0        8        0        0
    x4         0        0        2        0
```

```
B =
      u1
 x1    4
 x2    0
 x3    0
 x4    0

C =
          x1       x2       x3       x4
 y1        0      3.5    1.435   0.5601

D =
      u1
 y1    0
```

11. По реакции системы на ступенчатое воздействие проверьте чувствительность системы к смещению корней контура наблюдателя к корням контура регулятора.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В каких случаях целесообразно использовать наблюдатель?

2. По графику реакции объекта (см. п.2 Задания 1) на ступенчатое воздействие определите, устойчив объект или нет?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А.А.Алексеев, Д.Х.Имаев, Н.Н.Кузьмин, В.Б.Яковлев. Теория управления: Учеб./СПб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 1999. – 435 с.
2. Dr. Bob Davidov. Аналитическое конструирование линейно-квадратичного регулятора. http://portalnp.ru/wp-content/uploads/2021/01/16.06_LQR_control_v1a.pdf
3. Dr. Bob Davidov. Аналитическое конструирование интегрального линейно-квадратичного регулятора. http://portalnp.ru/wp-content/uploads/2021/01/16.07_LQI_control_v1a.pdf
4. Help MATLAB.
5. Dr. Bob Davidov. Компьютерные технологии управления в технических системах. http://portalnp.ru/author/bobdavidov