Теория определения координат точки, находящейся в пространстве 4- и 8-мерной произвольно-угольной системы координат

В уже известной работе данного автора “Реальная многомерная произвольно-угольная система координат” (optimat.ucoz.ru) вопросу определения координат точки, находящейся в пространстве названной системы координат, уделено внимание недостаточное. Поэтому данная статья и предназначена для устранения этого пробела. Она, к тому же, является весомым дополнением к выше упомянутой работе.

Текст данной статьи состоит, в основном, из рисунков и коротких комментариев к ним. Начертание рисунков предполагает совместное использование как аксонометрии, так и планиметрии. Но в отдельных случаях, когда это возможно без ущерба объективности восприятия рисунка применена лишь более простая планиметрия.

Следует также учитывать и то, что по правилам тригонометрии невидимые линии принято изображать штриховыми. Но, учитывая то, что на столь специфических рисунках важнее, чтобы координаты выглядели однозначно, приходится этим правилом пренебречь.

В каркасах рисунков некоторых размерностей для большей наглядности отсутствуют необязательные или незначащие их элементы.

1. Теория определения координат точки в 4-мерном пространстве

Этот пункт статьи имеет, пожалуй, самое важное значение, так как именно он вводит читателя в новую систему координат. Описание данной теории не предполагает объявления каких-либо правил и законов, так как такие правила и законы по такому материалу могут быть выработаны лишь по истечении длительного срока, т.е. тогда только, когда данная теория (если это произойдёт) будет принята математическим сообществом без возражений. Поэтому автор ограничился предоставлением примеров, показывающих правомерность использования данной системы координат с одной стороны, а с другой – не озабочивая себя необходимостью соблюдать все каноны математического представления материала.

Определение координат точки в 4-мерном (как и во всех других приведённых ниже примерах) пространстве произвольно-угольной системы координат отличается, естественно, от их определения в пространстве системы координат прямоугольной трёхмерной. Но параллельно-плоскостной подход сохраняется и здесь. Добавлю, что здесь и далее определение координат точки в пространстве произвольно-угольной многомерной системы координат осуществляется на фоне того факта, что они, координаты, проверяются на предмет того, отвечают ли они требованиям уравнения прямой (по двум известным точкам), проходящей через данную точку $\boldsymbol{A}$, а потому и сама данная методика определения приобретает статус несомненности.

Пример:

Пусть даны два уравнения (с четырьмя неизвестными каждое) в четырёхмерном пространстве

$$\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} + \boldsymbol{x_4} = 8$$

$$9\boldsymbol{x_1} + 9\boldsymbol{x_2} + 7\boldsymbol{x_3} + 7\boldsymbol{x_4} = 63$$

(см. на следующей странице рис.1)

На рис.1 изображены образы упомянутых выше уравнений (методику см. в **optimat.ucoz.ru**) в виде окаймлённых (первое – зелёной, второе - сиреневой линиями) плоскостей и линия их пересечения $\boldsymbol{M_1M_2}$, проходящая через две точки - $\boldsymbol{M_1}$ и $\boldsymbol{M_2}$

Пояснения к рис.1:

Рисунок выполнен в аксонометрии специально с целью показа биссектрис и параллельности плоскостей.

Здесь:

- прямая $\boldsymbol{OC}$ – биссектриса угла $\boldsymbol{X_1OX_2}$

- прямая $\boldsymbol{OB}$ – биссектриса угла $\boldsymbol{X_3OX_4}$

- плоскость $\boldsymbol{M_1M_2RT}$ параллельна координатной плоскости

$\boldsymbol{X_1OX_2}$,

- плоскость $\boldsymbol{M_1M_2SK}$ параллельна координатной плоскости $\boldsymbol{X_3OX_4}$

- $\boldsymbol{V}$ – вектор направленности

- цифры – значения координат.

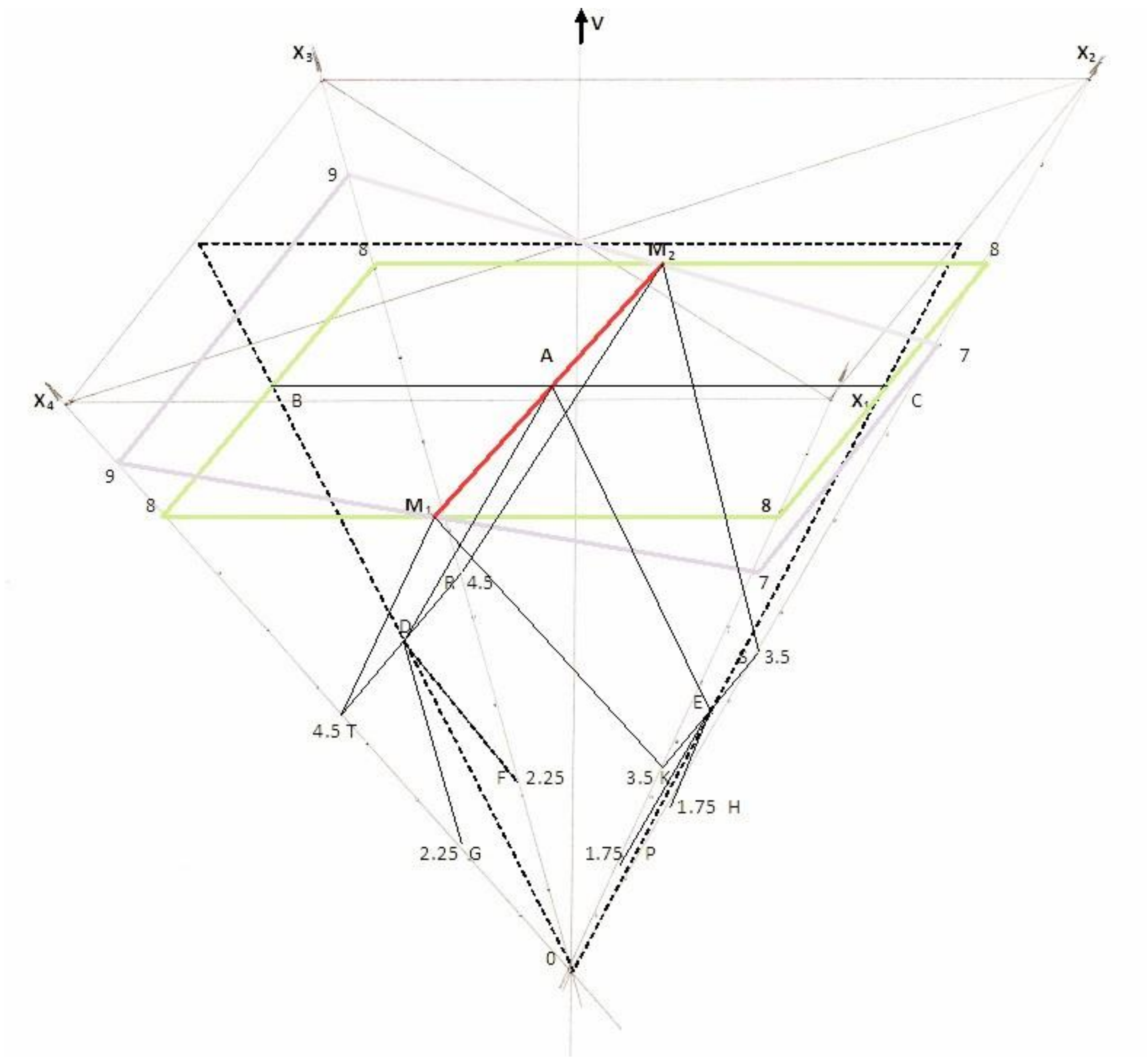

Рис.1

Составим каноническое уравнение линии пересечения M_1M_2. Но, чтобы написать каноническое уравнение прямой или, что - то же самое, уравнение прямой, проходящей через две данные точки, нужно найти координаты каких-либо двух характерных точек прямой. Ими могут служить точки пересечения прямой с двумя координатными плоскостями – например, $X_1O\,X_4$ (т. M_1) и $X_2O\,X_3$ (т. M_2).

По рис.2, графическим методом, проведя прямые $M_1\,K$, M_1T, $M_2\,S$ и M_2R, параллельные координатным осям $X_4\,O$, $X_1\,O$, X_3O и $X_2\,O$ соответственно, и по точкам их пересечения с названными координатными осями получаем координаты $\boldsymbol{M_1(3.5;\ 0;\ 0;\ 4.5)}$ и $\boldsymbol{M_2(0;\ 3.5;\ 4.5;\ 0)}$, а по ним находим направляющий вектор $\overline{M_1M_2}$ по формуле

$$\overline{M_1M_2}(x_{21} - x_{11};\ x_{22} - x_{12};\ x_{23} - x_{13};\ x_{24} - x_{14}),$$

т. е.

$$\overline{M_1M_2}(0 - 3.5;\ 3.5 - 0;\ 4.5 - 0;\ 0 - 4.5),$$

Теперь можно записать уравнение прямой, проходящей через эти точки – $\boldsymbol{M_1(3.5;\ 0;\ 0;\ 4.5)}$ и $\boldsymbol{M_2(0;\ 3.5;\ 4.5;\ 0)}$:

$$\frac{x1-3.5}{-3.5} = \frac{x2-0}{3.5} = \frac{x3-0}{4.5} = \frac{x4-4.5}{-4.5}$$

Примечание: здесь индексы координат ($_1$, $_2$, $_3$ и $_4$ оказались выше роста своих обладателей – не позволяет сделать это правильно их необходимое присутствие в формульных записях - но воспринимать их надо как ростом ниже).

Проверка:

Подставим координаты точки $\boldsymbol{M_1(3.5;\ 0;\ 0;\ 4.5)}$ в полученные уравнения:

$$\frac{3.5-3.5}{-3.5} = \frac{0-0}{3.5} = \frac{0-0}{4.5} = \frac{4.5-4.5}{-4.5}$$

$$0 = 0 = 0 = 0$$

Получены верные равенства. Уравнение верное.

Подставим координаты точки $\boldsymbol{M_2(0;\ 3.5;\ 4.5;\ 0)}$ в полученные уравнения:

$$\frac{0-3.5}{-3.5} = \frac{3.5-0}{3.5} = \frac{4.5-0}{4.5} = \frac{0-4.5}{-4.5}$$

$$1 = 1 = 1 = 1$$

Проверим дополнительно правильность полученного уравнения, подставив в него координаты точки $\boldsymbol{A}$, произвольно взятой на линии пересечения плоскостей. Графически (по рис.2) определим и её координаты.

Они получились такими - ***A(1.75; 1.75; 2.25; 2.25)***

Подставим координаты точки ***A(1.75; 1.75; 2.25; 2.25)*** в полученные уравнения

$$\frac{1.75-3.5}{-3.5} = \frac{1.75-0}{3.5} = \frac{2.25-0}{4.5} = \frac{2.25-4.5}{-4.5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Получены верные равенства. Уравнение верное.

Таким образом, в результате составления канонического уравнения линии пересечения двух непараллельных плоскостей в пространстве четырёхмерной произвольно-угольной системы координат, заданной общими уравнениями

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

$$9x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 63$$

а также – получения по показанной на рисунке 2 графической методике координат произвольной точки $\boldsymbol{A}$, подтверждённой тем, что они отвечают требованиям канонического уравнения прямой $\boldsymbol{M_1M_2}$, на которой она находится, можно сделать вывод, что показанная методика графического определения координат в пространстве произвольно-угольной четырёхмерной системы координат правомочна.

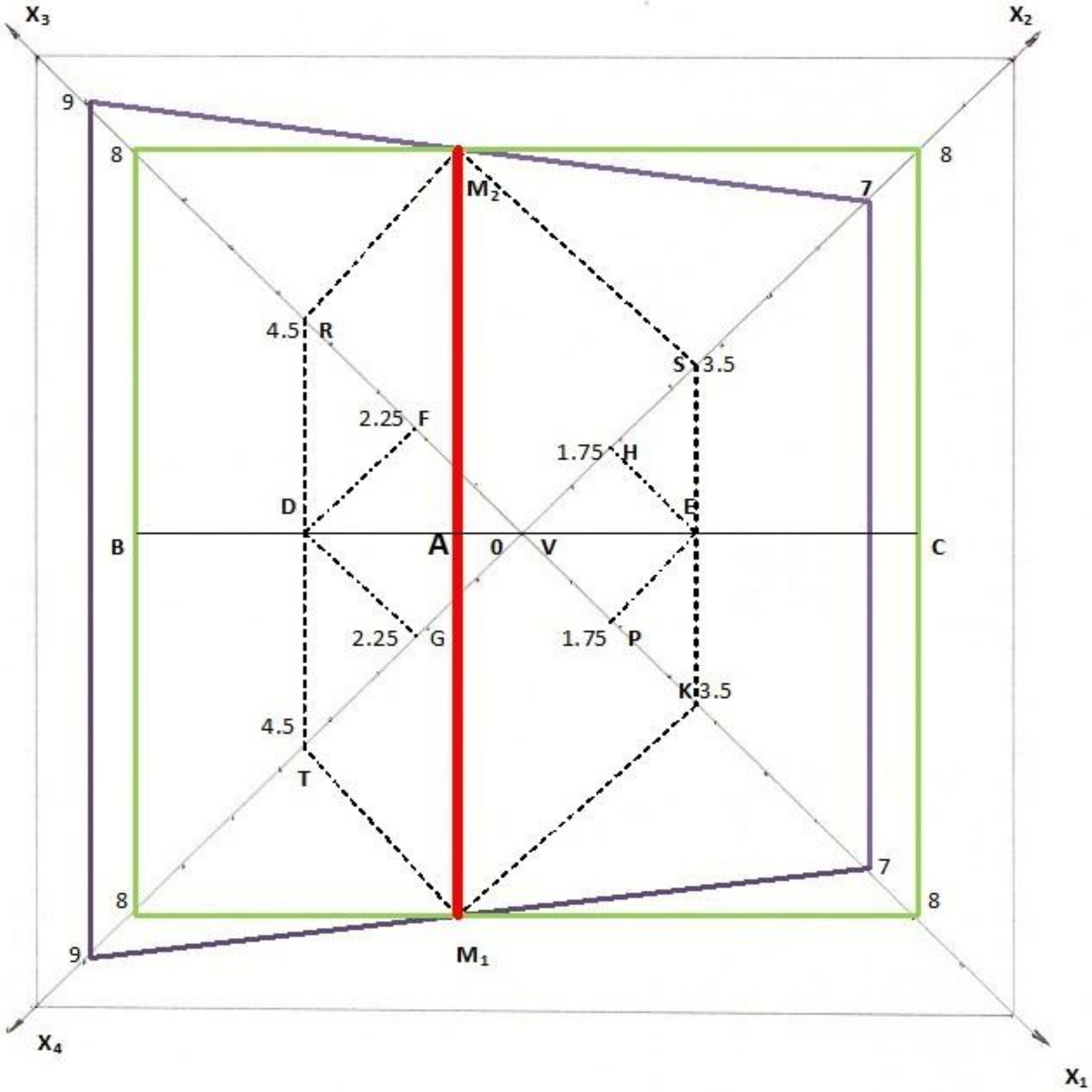

Рис.2

Пояснения к рисунку: рис.2 отражает все элементы рисунка 1, но не в аксонометрии, а в планиметрии. Поэтому пояснения, данные для рисунка 1, в полной мере относятся и к рисунку 2.

Правомочность методики определения координат точки в 4-мерной произвольно-угольной системе координат можно подтвердить и на примере двух, лежащих на линии пересечения, дополнительных точек (***M₃*** и ***M₄)***, менее характерных, чем точка ***A*** (рис.3).

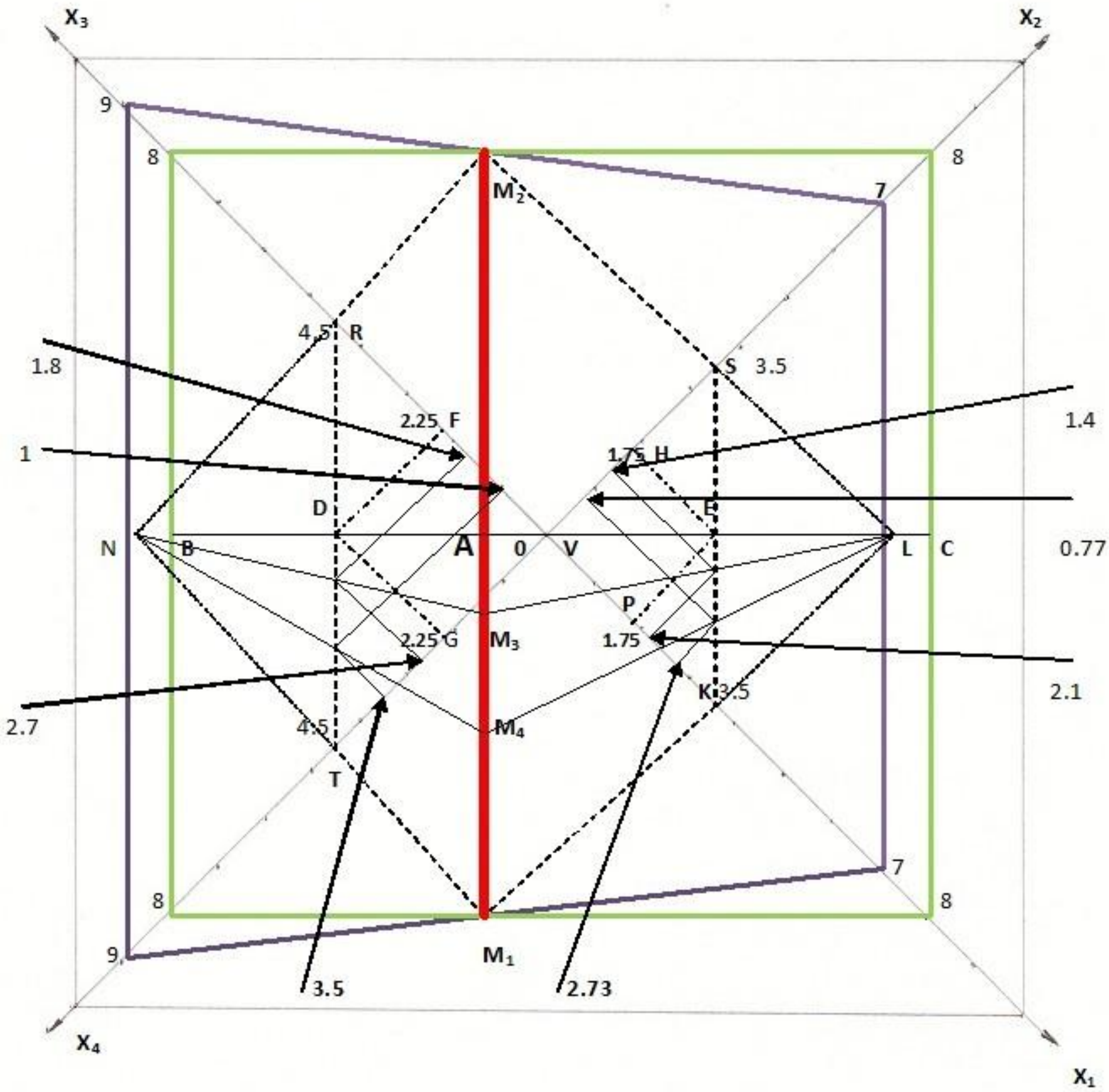

Рис.3

Для показа примера с участием точек M_3 и M_4 рис.3 дополним некоторыми элементами:

- продлим прямые M_1T и M_2R в сторону прямой BC до их взаимного пересечения,
- продлим прямые M_1K и M_2S в сторону прямой BC до их взаимного пересечения,
- на линии пересечения выберем точки M_3 и M_4,
- отобразим методику поиска координат точек M_3 и M_4.

Тогда рис.3, как преобразованный из рис.2, будет выглядеть следующим образом (см. рис.3):

Пояснения к рис.3:

- на концах выносных стрелок указаны координаты точек в тех местах, куда показывают их стрелки,

- точки ***N*** и ***L*** лежат на биссектрисах ***OB*** и ***OC*** соответственно,

- см. пояснения к рис.1.

Таким образом, по рис.3 графически определены координаты произвольных точек M_3 и M_4, т. е. $M_3(2.1;1.4;1.8;2.7)$ и $M_4(2.73;0.77;1;3.5)$.

Проверка:

Подставим координаты точки $M_3(2.1;1.4;1.8;2.7)$ в полученные уравнения:

$$\frac{2.1-3.5}{-3.5} = \frac{1.4-0}{3.5} = \frac{1.8-0}{4.5} = \frac{2.7-4.5}{-4.5}$$

$$0.4 = 0.4 = 0.4 = 0.4$$

Получены верные равенства. Уравнение верное.

Подставим координаты точки $M_4(2.73;0.77;1;3.5)$ в полученные уравнения:

$$\frac{2.73-3.5}{-3.5} = \frac{0.77-0}{3.5} = \frac{1-0}{4.5} = \frac{3.5-4.5}{-4.5}$$

$$0.22 = 0.22 = 0.22 = 0.22$$

Получены верные равенства. Уравнение верное.

Для окончательной проверки правильности координат точек ***A,*** M_3 и M_4 подставим их в исходные уравнении.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

$$9x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 63$$

Точка ***A:***

$$1.75 + 1.75 + 2.25 + 2.25 = 8$$

$$9 \cdot 1.75 + 9 \cdot 1.75 + 7 \cdot 2.25 + 7 \cdot 2.25 = 63$$

Точка ***M₃:***

$$2.1 + 1.4 + 1.8 + 2.7 = 8$$

$$9 \cdot 2.1 + 9 \cdot 1.4 + 7 \cdot 1.8 + 7 \cdot 2.7 = 63$$

Точка ***M₄:***

$$2.73 + 0.77 + 1 + 3.5 = 8$$

$$9 \cdot 2.73 + 9 \cdot 0.77 + 7 \cdot 1 + 7 \cdot 3.5 = 63$$

Итак, использование

- двух уравнений с четырьмя неизвестными,

- графическое получение линии пересечения образов исходных уравнений,
- построение канонического уравнения прямой по двум точкам,
- взятие произвольных точек ***A, M_3*** и ***M_4*** и определение их координат
- проверка полученных координат этих точек путём подстановки их в каноническое уравнение прямой и в исходные уравнения показало, что описанный в данной статье способ определения координат точки в пространстве четырёхмерной произвольно-угольной системы координат правильный и потому – правомочный.

2. Теория определения координат точки в 8-мерном пространстве

Пример: Дана (в планиметрии) 8-мерная произвольно-угольная система координат, и в её пространстве - произвольная точка, через которую проходят две произвольных прямых с двумя известными точками на каждой. Необходимо, найти координаты данной точки (рис.4).

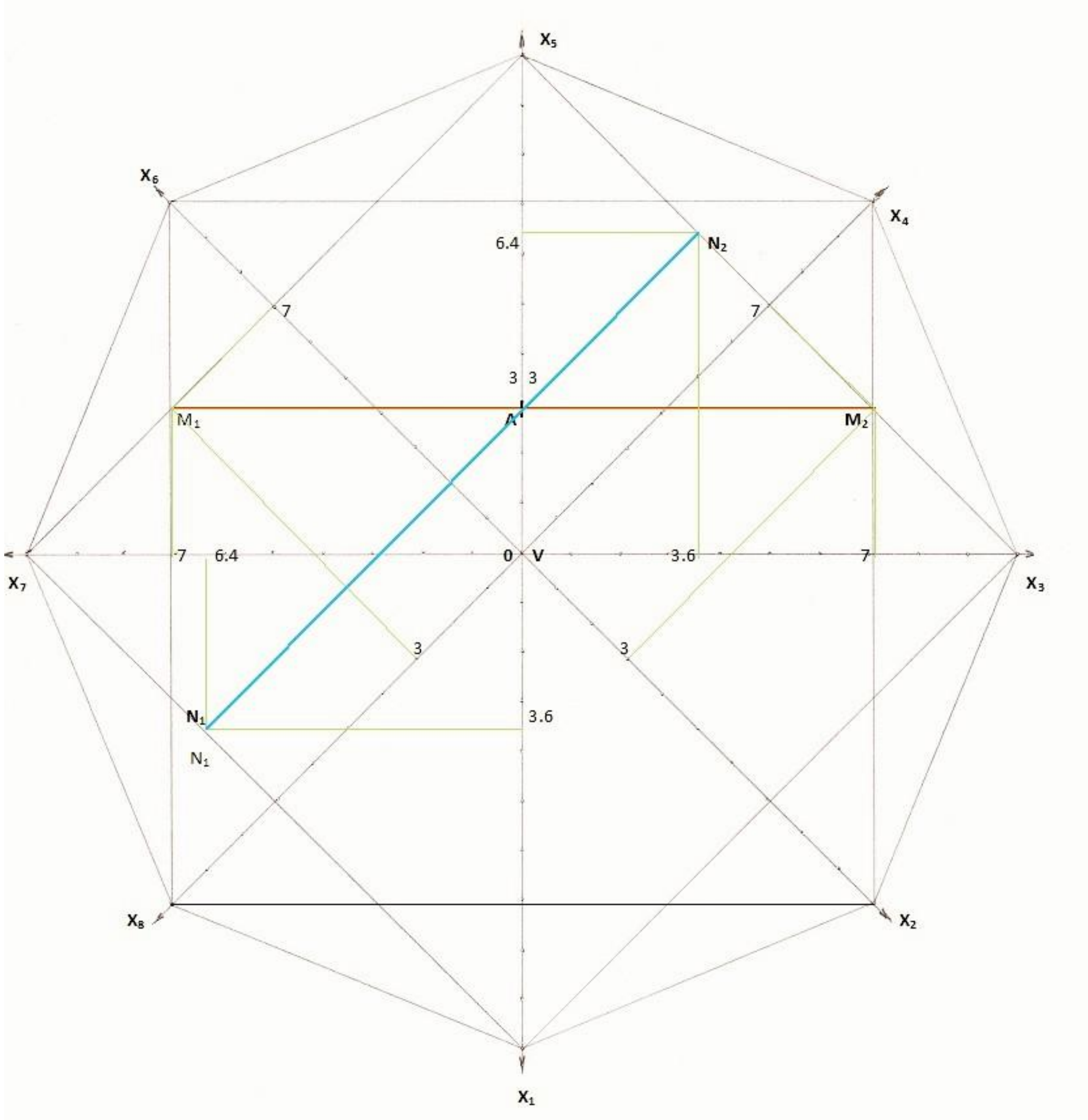

Рис.4

Пояснения к рис.4:

- M_1M_2 – произвольная прямая, проходящая через данную точку A,
- N_1N_2 – произвольная прямая, проходящая через данную точку A,

- цифры на координатных осях – координаты точек M_1 и M_2, N_1 и N_2,

- A – обозначение данной точки.

Решение.

Определение координат точки в 8-мерном пространстве произвольно-угольной системы координат основано на теории определения координат точки в 4-мерном пространстве, т.к. 8-мерное пространство состоит из двух 4-мерных фигур. Здесь также применён параллельно-плоскостной подход. И также - на фоне того факта, что координаты проверяются на предмет того, отвечают ли они требованиям уравнений прямых (по двум известным точкам на каждой), проходящих через данную точку ***A***.

1. Определим уравнения прямых, проходящих через данную точку ***A***

Автор не видит необходимости показывать ход определения уравнений прямых $\boldsymbol{M_1M_2}$ и $\boldsymbol{N_1N_2}$, т. к. методика их определения широко освещена в различных математических источниках. Достаточно показать сами получившиеся уравнения. Вот они:

Уравнение прямой $\boldsymbol{M_1M_2}$

$$\frac{x1-0}{0}=\frac{x2-0}{3}=\frac{x3-0}{7}=\frac{x4-0}{7}=\frac{x5-3}{0}=\frac{x6-7}{-7}=\frac{x7-7}{-7}=\frac{x8-3}{-3}$$

Уравнение прямой $\boldsymbol{N_1N_2}$

$$\frac{x1-0}{-3.6}=\frac{x2-0}{0}=\frac{x3-0}{3.6}=\frac{x4-0}{0}=\frac{x5-3}{6.4}=\frac{x6-7}{0}=\frac{x7-7}{-6.4}=\frac{x8-3}{-0}$$

Примечание: здесь индексы координат ($_1$, $_2$, $_3$, $_4$, $_5$, $_6$, $_7$ и $_8$ оказались выше роста своих обладателей –координат (вид формульных записей вынуждает) - но воспринимать их надо как ростом ниже.

Определим четыре координаты точки ***A*** в пространстве одного из квадратов - $\boldsymbol{X_2X_4X_6X_8}$ рисунка 4 (см. рис.5).

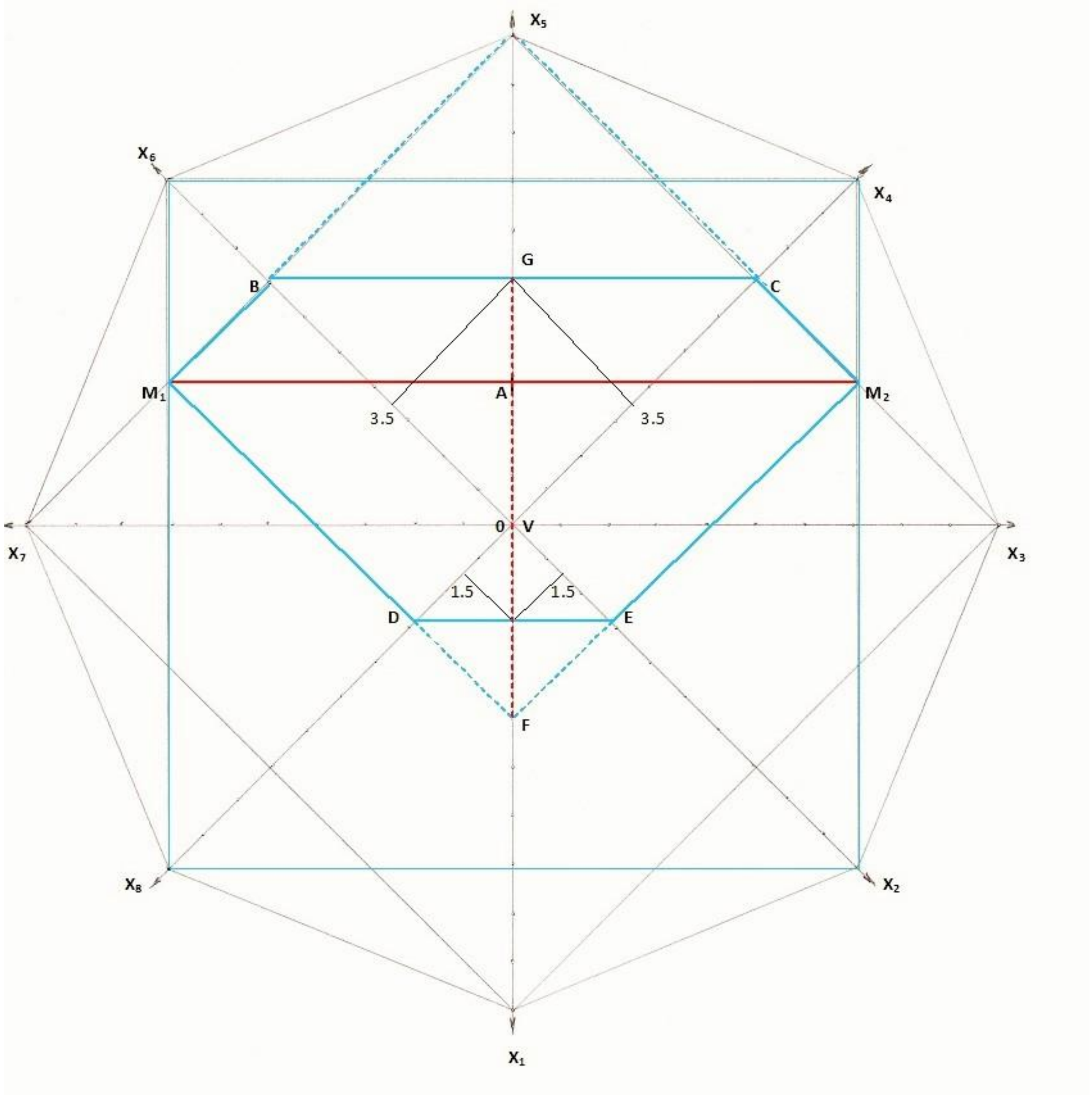

Рис.5

Пояснения к рис.5

- плоскость $\boldsymbol{M_1BCM_2}$ параллельна координатной плоскости $\boldsymbol{X_2OX_8}$
- плоскость $\boldsymbol{M_1M_2ED}$ параллельна координатной плоскости $\boldsymbol{X_4OX_6}$
- $\boldsymbol{V}$ **–** вектор направленности
- цифры – значения координат.
- $\boldsymbol{A}$ – данная точка,

Из рис.5 (внутри квадрата $X_2X_4X_6X_8$) по методике 4-мерного пространства определены координаты точки A. Они оказались такими:

$$x_2 = 1.5,\quad x_4 = 3.5,\quad x_6 = 3.5\quad x_8 = 1.5$$

Проверим правильность этих данных с помощью уравнения прямой M_1M_2.

$$\frac{x2-0}{3} = \frac{x4-0}{7} = \frac{x6-7}{-7} = \frac{x8-3}{-3}$$

$$\frac{1.5-0}{3} = \frac{3.5-0}{7} = \frac{3.5-7}{-7} = \frac{1.5-3}{-3}$$

$$\frac{1}{2}\qquad \frac{1}{2}\qquad \frac{1}{2}\qquad \frac{1}{2}$$

Равенства подтверждаются.

Значит координаты $x_2 = 1.5$, $x_4 = 3.5$, $x_6 = 3.5$, $x_8 = 1.5$ верны.

Определим четыре координаты точки A в пространстве другого квадрата - $X_1X_3X_5X_7$ рисунка 4 (см. рис. 6).

Пояснения к рис.6

- плоскость N_1BCN_2 параллельна координатной плоскости X_1OX_3
- плоскость N_1DEN_2 параллельна координатной плоскости X_5OX_7
- V – вектор направленности

- цифры – значения координат.

- A – данная точка,

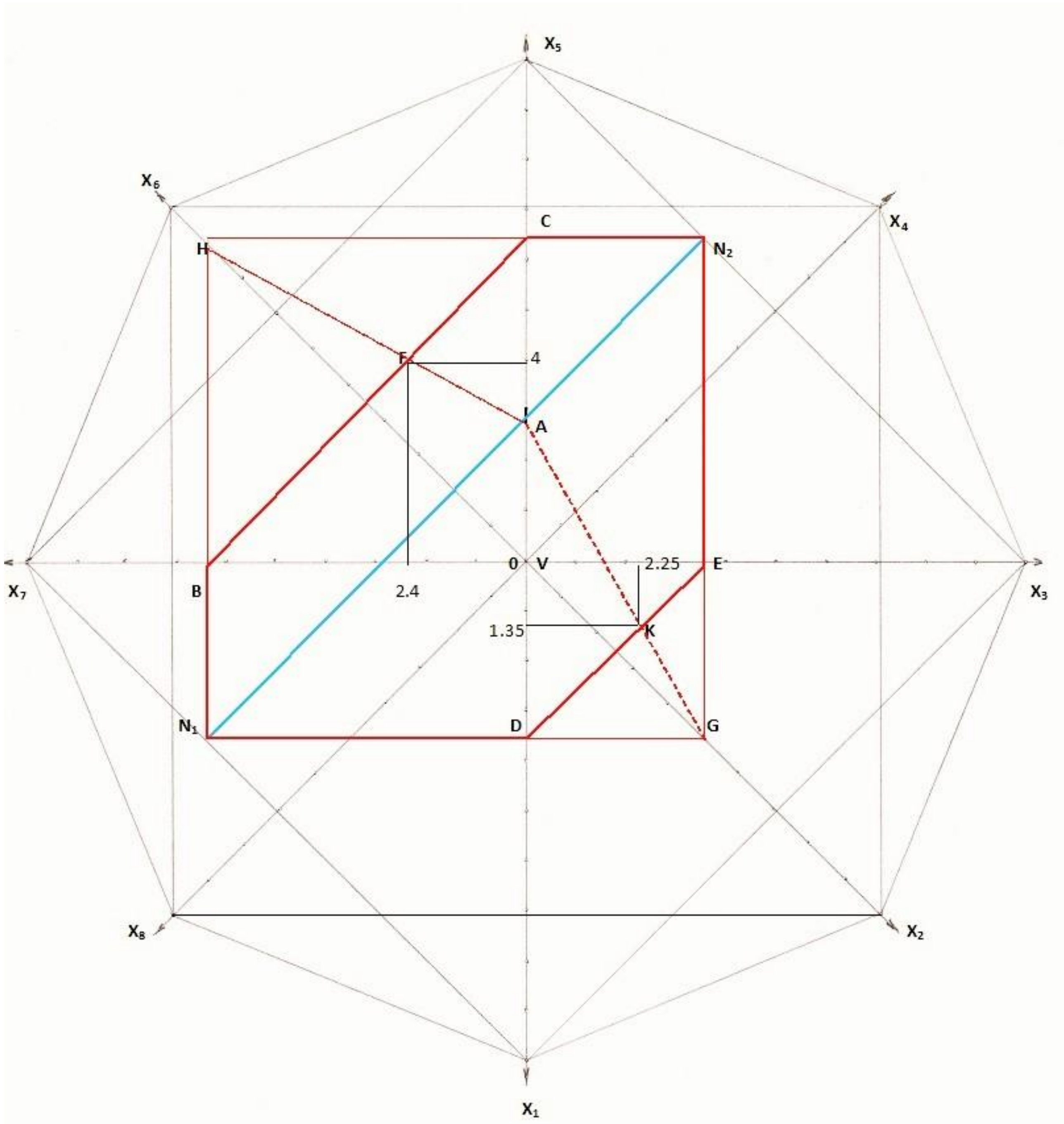

Рис.6

Из рис.6 (внутри квадрата $X_1X_3X_5X_7$) по методике 4-мерного пространства определены координаты точки A. Они оказались такими:

$$x_1 = 1.35, \quad x_3 = 2.25, \quad x_5 = 4 \text{ и } x_7 = 2.4$$

Проверим правильность этих данных с помощью уравнения прямой N_1N_2.

$$\frac{x1-3.6}{-3.6} = \frac{x3-0}{3.6} = \frac{x5-0}{6.4} = \frac{x7-6.4}{-6.4}$$

$$\frac{1.35-3.6}{-3.6} = \frac{2.25-0}{3.6} = \frac{4-0}{6.4} = \frac{2.4-3}{-6.4}$$

$$0.625 = 0.625 = 0.625 = 0.625$$

Равенства подтверждаются.

Значит координаты $x_1 = 1.35$, $x_3 = 2.25$, $x_5 = 4$ и $x_7 = 2.4$ верны.

Итак, в результате того, что

- через данную точку A были проведены две произвольные прямые,

- по двум известным для каждой из них точкам были получены их уравнения,

- в планиметрическом каркасе системы координат был выбран сначала один из квадратов и по методике 4-мерного пространства в нём определены первые четыре координаты, потом – второй и также определены оставшиеся четыре координаты,

- по соответствующим уравнениям прямой были подтверждены координаты, полученные в обоих квадратах

мы получили следующие координаты произвольной точки

A(1.35; 1.5; 2.25; 3.5; 4; 3.5; 2.4; 1.5)

Приходим к выводу, что показанная методика определения координат произвольной точки в пространстве 8-мерной произвольно–угольной системы координат правомочна.

Конец статьи