Теория определения координат точки, находящейся в пространстве 3-, 6- и 9-мерной произвольно-угольной системы координат

В уже известной работе данного автора “Реальная многомерная произвольно-угольная система координат” (optimat.ucoz.ru) вопросу определения координат точки, находящейся в пространстве названной системы координат, уделено внимание недостаточное. Поэтому данная статья и предназначена для устранения этого пробела. Она, к тому же, является весомым дополнением к выше упомянутой работе.

Текст данной статьи состоит, в основном, из рисунков и коротких комментариев к ним. Начертание рисунков предполагает совместное использование, как аксонометрии, так и планиметрии. Но в отдельных случаях, когда это возможно без ущерба объективности восприятия рисунка, применена лишь более простая планиметрия.

Следует также учитывать и то, что по правилам тригонометрии невидимые линии принято изображать штриховыми. Но, учитывая то, что на столь специфических рисунках важнее, чтобы координаты выглядели однозначно, автору пришлось этим правилом пренебречь.

В каркасах рисунков некоторых размерностей для большей наглядности отсутствуют необязательные или незначащие их элементы.

1. Теория определения координат точки в 3-мерном пространстве

Одним из способов определения координат точки в пространстве прямоугольной трёхмерной Декартовой системы координат является параллельно-плоскостной способ, показанный на рис.1.

Пояснения к рисунку: на рис.1, выполненном в планиметрии, через данную в пространстве произвольно-угольной трёхмерной системы координат ***XYZO*** точку ***A*** параллельно координатным плоскостям ***XOZ, XOY*** и ***YOZ*** проведены три плоскости, окаймлённые синей, красной и зелёной линиями соответственно. Эти плоскости пересекают координатные оси в точках, являющихся координатами данной точки ***A***.

Таким образом, данная точка будет иметь координаты ***A(2, 5, 3)***.

Этот же способ применим и в пространстве произвольно-угольной трёхмерной системы координат.

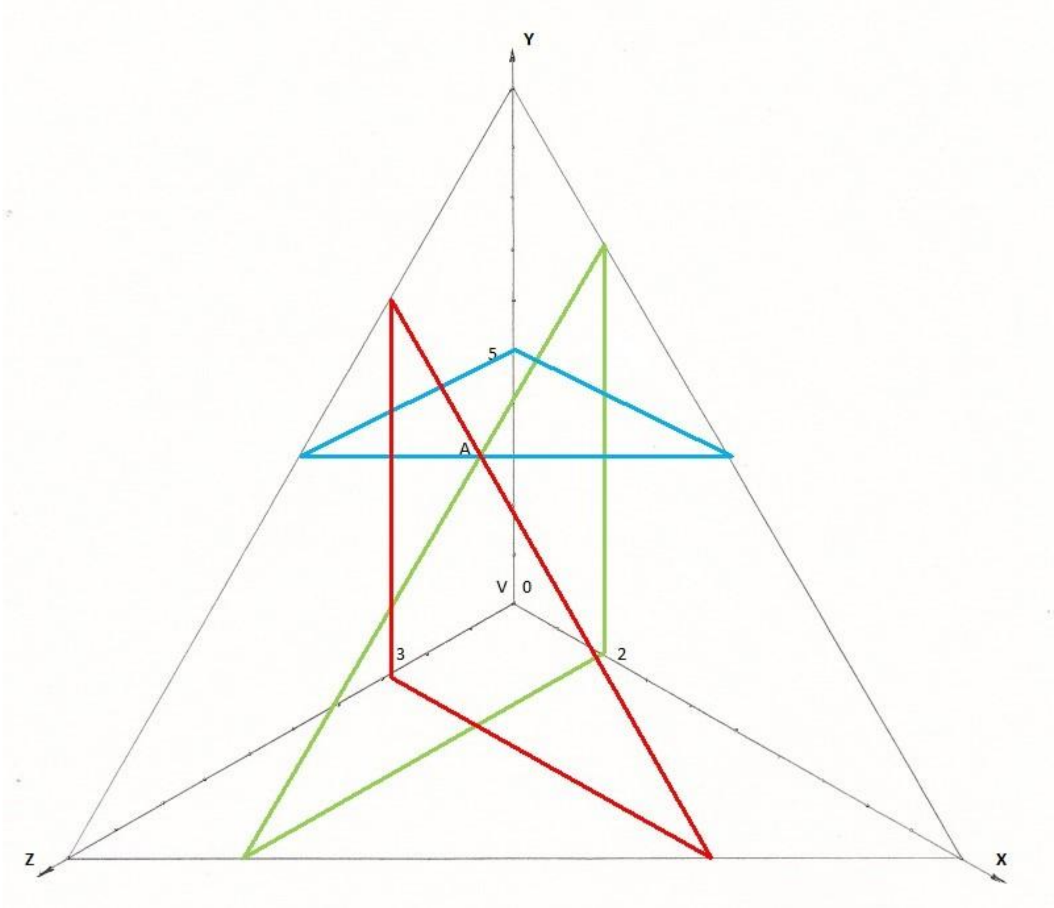

Рис.1

2. Теория определения координат точки в 6-мерном пространстве.

Против логики, но зато вполне уместно, рассмотреть сейчас теорию определения координат точки именно в 6-мерном пространстве, т. к. при этом используются правила, присущие определению координат в 3-мерной системе: ведь в 6-мерную входят две 3-мерные!

Поэтому, теория определения координат точки в 6-мерном пространстве произвольно-угольной 6-мерной системы координат примечательна тем, что, если на каркас 6-мерной системы смотреть сверху (в плане), то нетрудно заметить, что он состоит из двух наложенных друг на друга треугольников, что упрощает поиски координат в этом случае: на первом этапе (в рамках каждого из двух треугольников) по параллельно-плоскостной методике, используемой для определения координат точки, находящейся в пространстве трёхмерной системы координат, описанной выше.

Поэтому такое определение и будем делать в два простых этапа:, определяются координаты (в рамках одного треугольника) с чётными, к примеру, индексами, на втором (в рамках другого треугольника) – с нечётными. Забегая вперёд, можно сказать, что параллельно-плоскостная методика для трёхмерной системы координат применима аналогичным способом и для других размерностей, кратных трём – 9, 12, 15 и т. д.

Пример: в 6-мерном пространстве произвольно-угольной системы координат дана произвольная точка $\boldsymbol{A}$. Необходимо на фоне её присутствия на прямой с двумя известными точками, имеющей каноническое уравнение, подтвердить правильность методики двух этапов по правилам трёхмерной системы (рис.2).

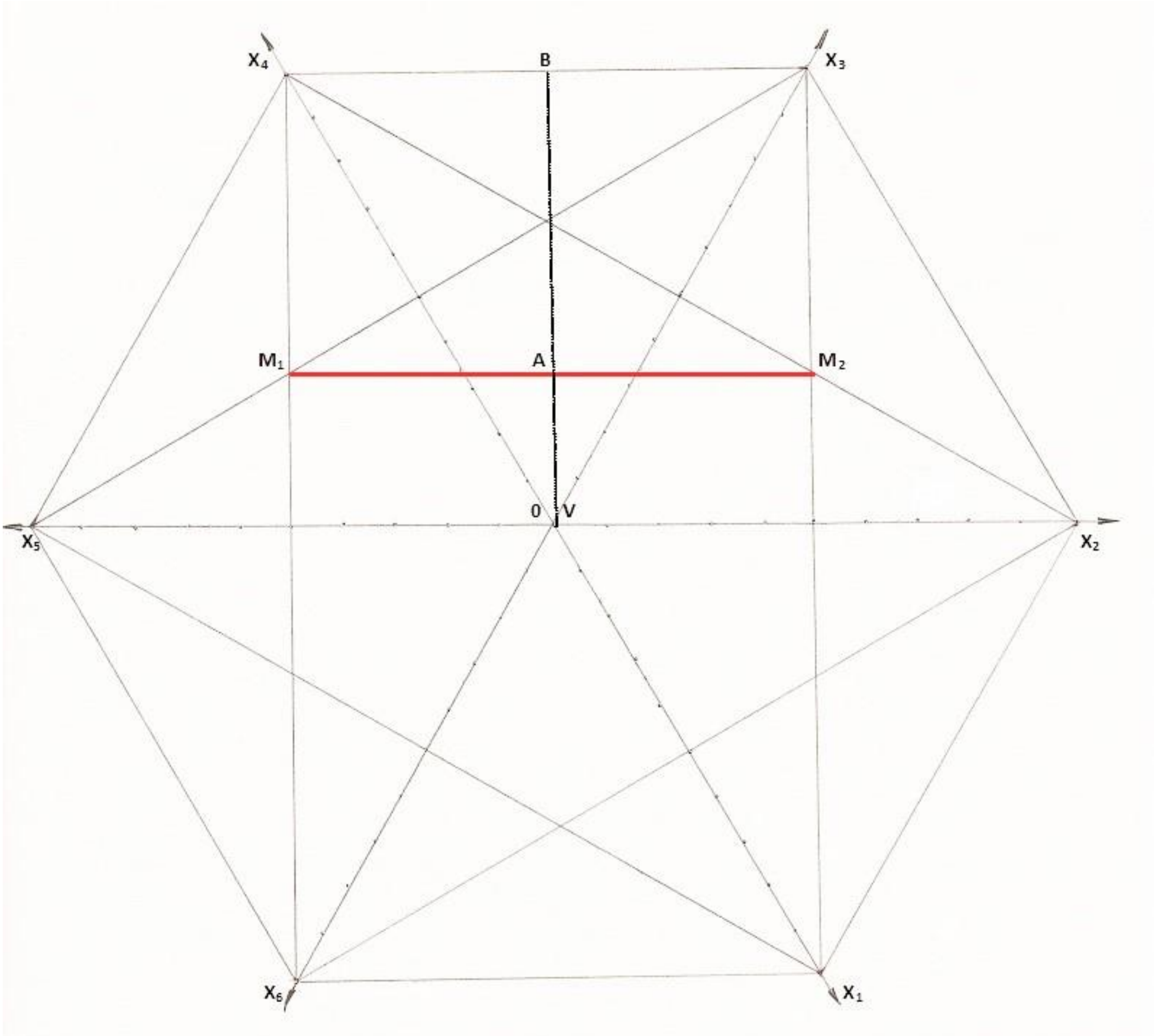

Рис.2

Пояснения к рисунку 2:

- на рисунке видны два наложенных друг на друга треугольника – $\boldsymbol{X_1X_3X_5}$ и

$X_2X_4X_6$,
- прямая M_1M_2 - произвольная прямая, каноническое уравнение которой необходимо составить по двум точкам прежде всего,
- т. A – произвольная точка на прямой M_1M_2, координаты которой требуется определить,
- прямая OB биссектриса угла X_3OX_4.

Решение

1. Составим каноническое уравнение прямой M_1M_2. Для этого определим вначале координаты точек M_1 и M_2 (рис.3).

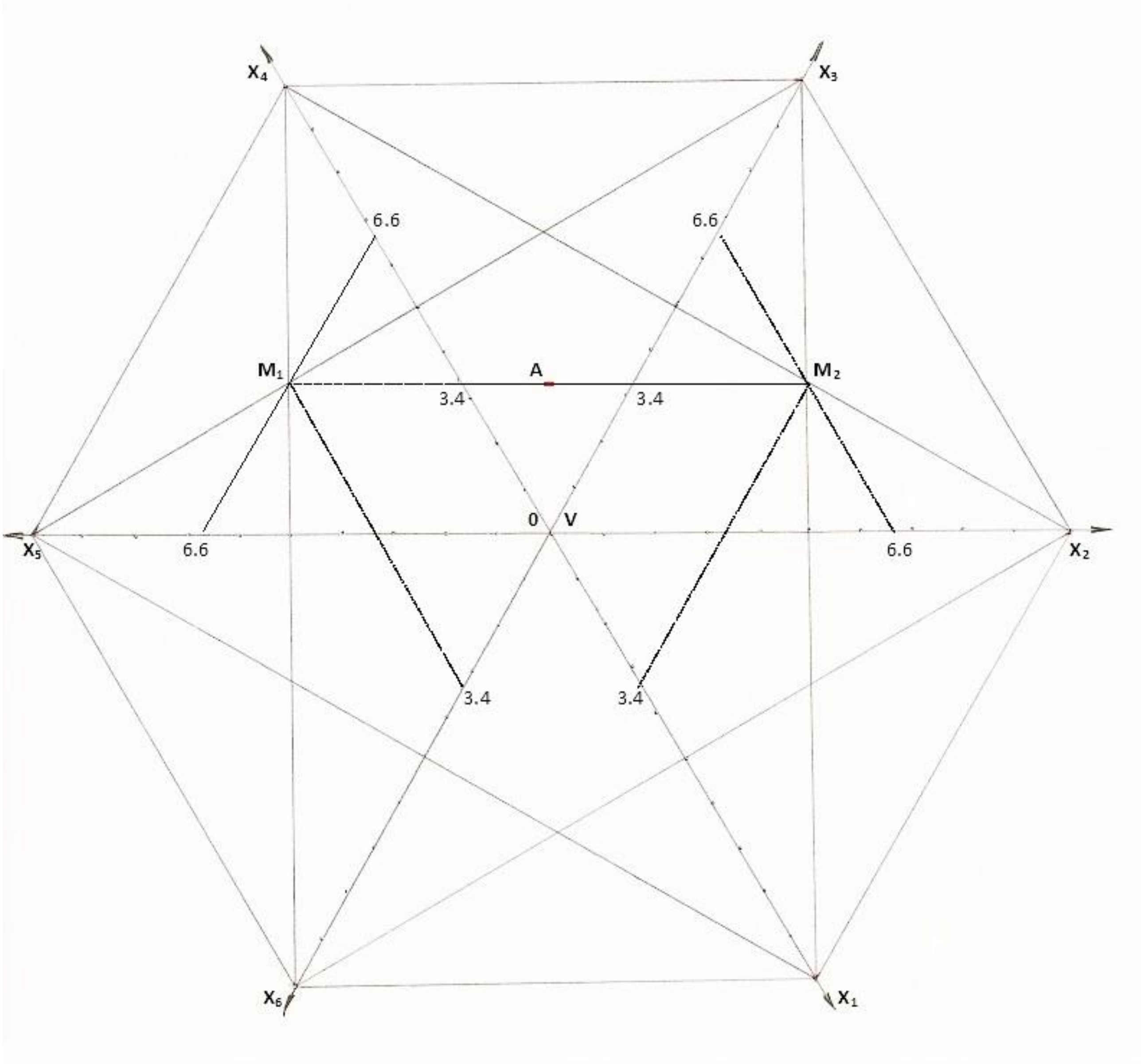

Рис.3

Пояснения к рис.3: точки $\boldsymbol{M_1}$ и $\boldsymbol{M_2}$ в пересечениях плоскостей $\boldsymbol{X_3OX_5}$, $\boldsymbol{X_4OX_6}$ и $\boldsymbol{X_3OX_1}$, $\boldsymbol{X_2OX_4}$ соответственно, поэтому их координаты будут результатом показаний всех координатных осей этих плоскостей.

Они будут следующие:

$$M_1(0;\ 0;\ 3.4;\ 6.6;\ 6.6;\ 3.4\ ) \text{ и } M_2(3.4;\ 6.6;\ 6.6;\ 3.4;\ 0;\ 0\ ).$$

По этим двум точкам определим направляющий вектор. Он будет иметь вид:

$$\overline{M_1M_2}(x_{21}-x_{11};\ x_{22}-x_{12};\ x_{23}-x_{13};\ x_{24}-x_{14};\ x_{25}-x_{15};\ x_{26}-x_{16}),$$

т. е.

$$\overline{M_1M_2}(3.4-0;\ 6.6-0;\ 6.6-3.4;\ 3.4-6.6;\ 0-6.6;\ 0-3.4),$$

В итоге $\overline{M_1M_2}(3.4;\ 6.6;\ 3.2;\ -3.2;\ -6.6;\ -3.4)$

Теперь можно записать уравнение прямой, проходящей через эти точки -

$$M_1(0;\ 0;\ 3.4;\ 6.6;\ 6.6;\ 3.4) \text{ и } M_2(3.4;\ 6.6;\ 6.6;\ 3.4;\ 0;\ 0\ ).$$

$$\frac{x1-0}{3.4}=\frac{x2-0}{6.6}=\frac{x3-3.4}{3.2}=\frac{x4-6.6}{-3.2}=\frac{x5-6.6}{-6.6}=\frac{x4-3.4}{-3.4}$$

Примечание: здесь индексы координат (1, 2, 3, 4, 5 и 6 оказались выше роста своих обладателей – не позволяет сделать это правильно их необходимое присутствие в формульных записях - но воспринимать их надо как ростом ниже).

Проверка:

Подставим координаты точки $M_1(0;\ 0;\ 3.4;\ 6.6;\ 6.6;\ 3.4\ )$ в полученные уравнения:

$$\frac{0-0}{3.4}=\frac{0-0}{6.6}=\frac{3.4-3.4}{3.2}=\frac{6.6-6.6}{-3.2}=\frac{6.6-6.6}{-6.6}=\frac{3.4-3.4}{-3.4}$$

$$0 = 0 = 0 = 0 = 0 = 0$$

Получены верные равенства. Уравнение верное.

Подставим координаты точки $M_2(3.4;\ 6.6;\ 6.6;\ 3.4;\ 0;\ 0)$ в полученные уравнения:

$$\frac{3.4-0}{3.4}=\frac{6.6-0}{6.6}=\frac{6.6-3.4}{3.2}=\frac{3.4-6.6}{-3.2}=\frac{0-6.6}{-6.6}=\frac{0-3.4}{-3.4}$$

$$1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1$$

Получены верные равенства. Уравнение верное.

2. Определим координаты в рамках треугольника, имеющего нечетную индексацию координатных осей (рис.4).

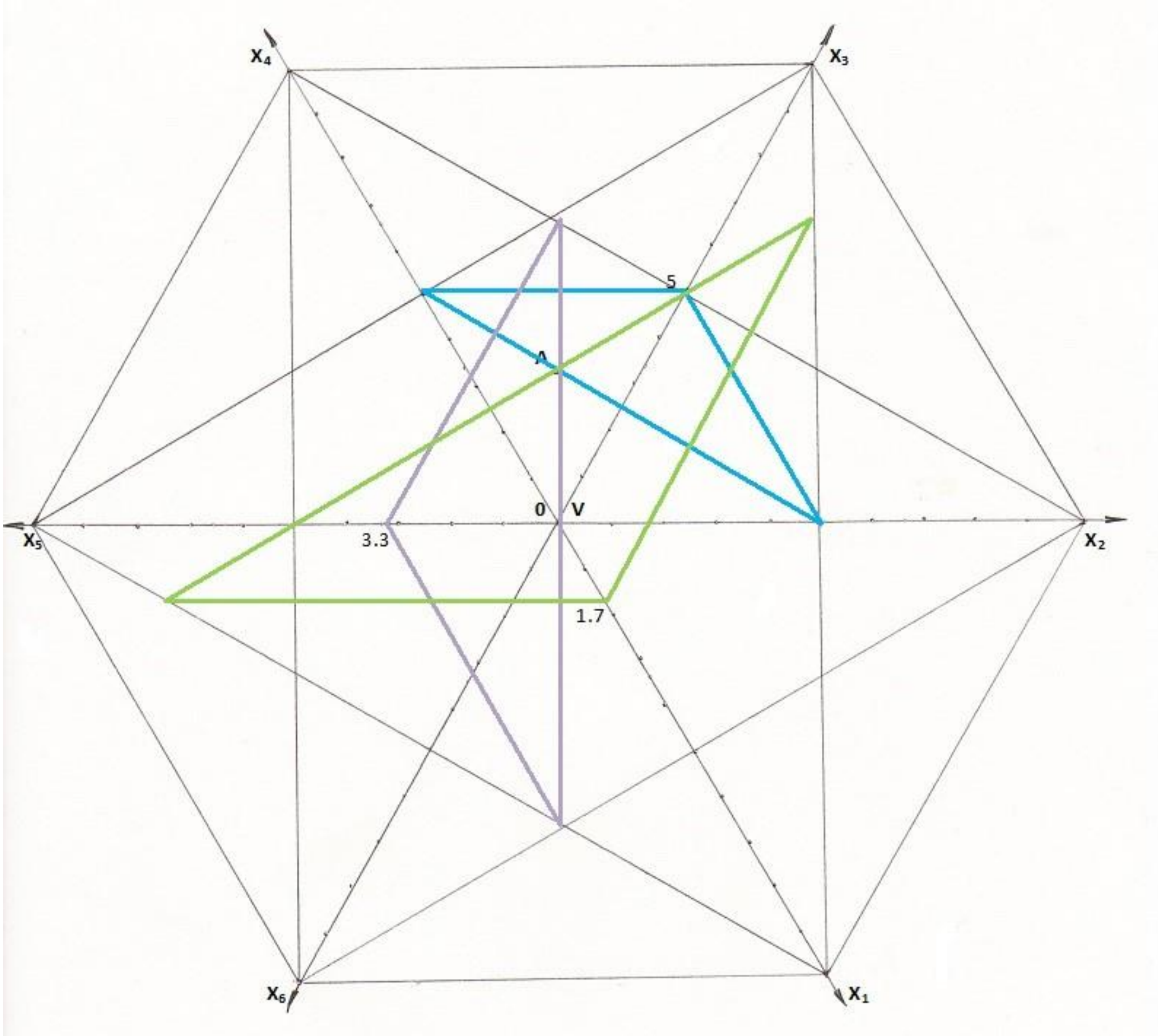

Рис.4

Пояснения к рис.4: через т. ***A*** проведены окаймлённые цветными линиями плоскости, параллельные соответствующим координатным плоскостям. Их пресечения с нечётными (чётные координаты пока показаны нулевыми) координатными осями дают координаты точки. Они получились такими:

A(1.7; 0; 5; 0; 3.3; 0)

3. Определим координаты в рамках треугольника, имеющего четную индексацию координатных осей (рис.5).

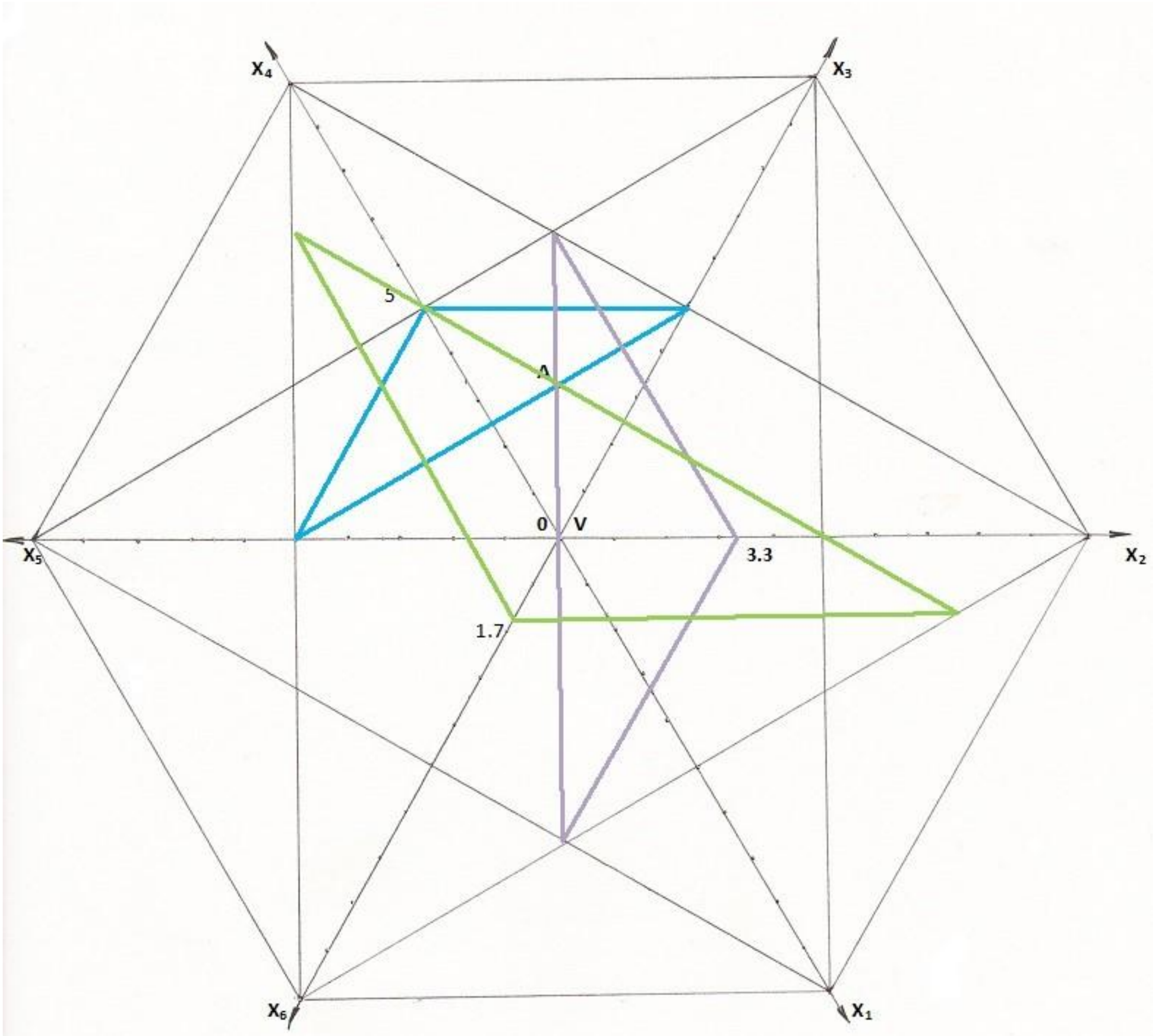

Рис.5

Пояснения к рисунку 5: через т. ***A*** проведены окаймлённые цветными линиями плоскости, параллельные соответствующим координатным плоскостям. Их пресечения с чётными (нечётные координаты хоть уже и определены, но пока показаны нулевыми) координатными осями дают координаты точки. Они получились такими:

$$A(0;3.3;\ 0;\ 5;\ 0;\ 1.7).$$

Конечным результатом (объединим координаты обоих шагов) координаты точки будут выглядеть как:

$$A(1.7;\ 3.3;\ 5;\ 5;\ 3.3;\ 1.7).$$

3. Проверим полученные координаты на их правильность путём их подстановки в каноническое уравнение прямой M_1M_2.

Подставим координаты точки $A(1.7;\ 3.3;\ 5;\ 5;\ 3.3;\ 1.7)$. в полученные уравнения:

$$\frac{1.7-0}{3.4}=\frac{3.3-0}{6.6}=\frac{5-3.4}{3.2}=\frac{5-6.6}{-3.2}=\frac{3.3-6.6}{-6.6}=\frac{1.7-3.4}{-3.4}$$

$$0.5 = 0.5 = 0.5 = 0.5 = 0.5 = 0.5$$

Получены верные равенства. Уравнение верное. Значит координаты т. ***A*** верны, отсюда и метод их определения верен.

3. Теория определения координат точки в 9-мерном пространстве.

9-мерная произвольно-угольная система координат, как и 6-мерная, является кратной трёхмерной (отличие лишь в том, что будут не два – как у 6-мерной – а три этапа определения). Поэтому все остальные действия те же, что и по отношению к 3- и 6-мерной размерностям, т. е. теория определения координат точки в 9-мерном пространстве произвольно-угольной 9-мерной системы координат примечательна тем, что это определение можно делать в три простых этапа: если на каркас 9-мерной системы смотреть сверху (в плане), то нетрудно заметить, что он состоит из трёх наложенных друг на друга треугольников. Наличие такого обстоятельства упрощает поиски координат в этом случае: на первом этапе (в рамках одного из треугольников) по параллельно-плоскостной методике, используемой для определения координат точки, находящейся в пространстве трёхмерной системы координат, описанной выше, определяются координаты с индексами 1, 4 и 7, на втором (в рамках второго треугольника) – с индексами 2, 5 и 8, на третьем (в рамках третьего треугольника) – с индексами 3, 6 и 9 .

Эта параллельно-плоскостная методика для трёхмерной системы координат применима аналогичным способом и для других размерностей, кратных трём – 9, 12, 15 и т. д.

Пример: в 9-мерном пространстве произвольно-угольной системы координат дана произвольная точка $\boldsymbol{A}$. Необходимо на фоне её присутствия на прямой с двумя известными точками, имеющей каноническое уравнение, подтвердить правильность методики трёх этапов по правилам трёхмерной системы (рис.6).

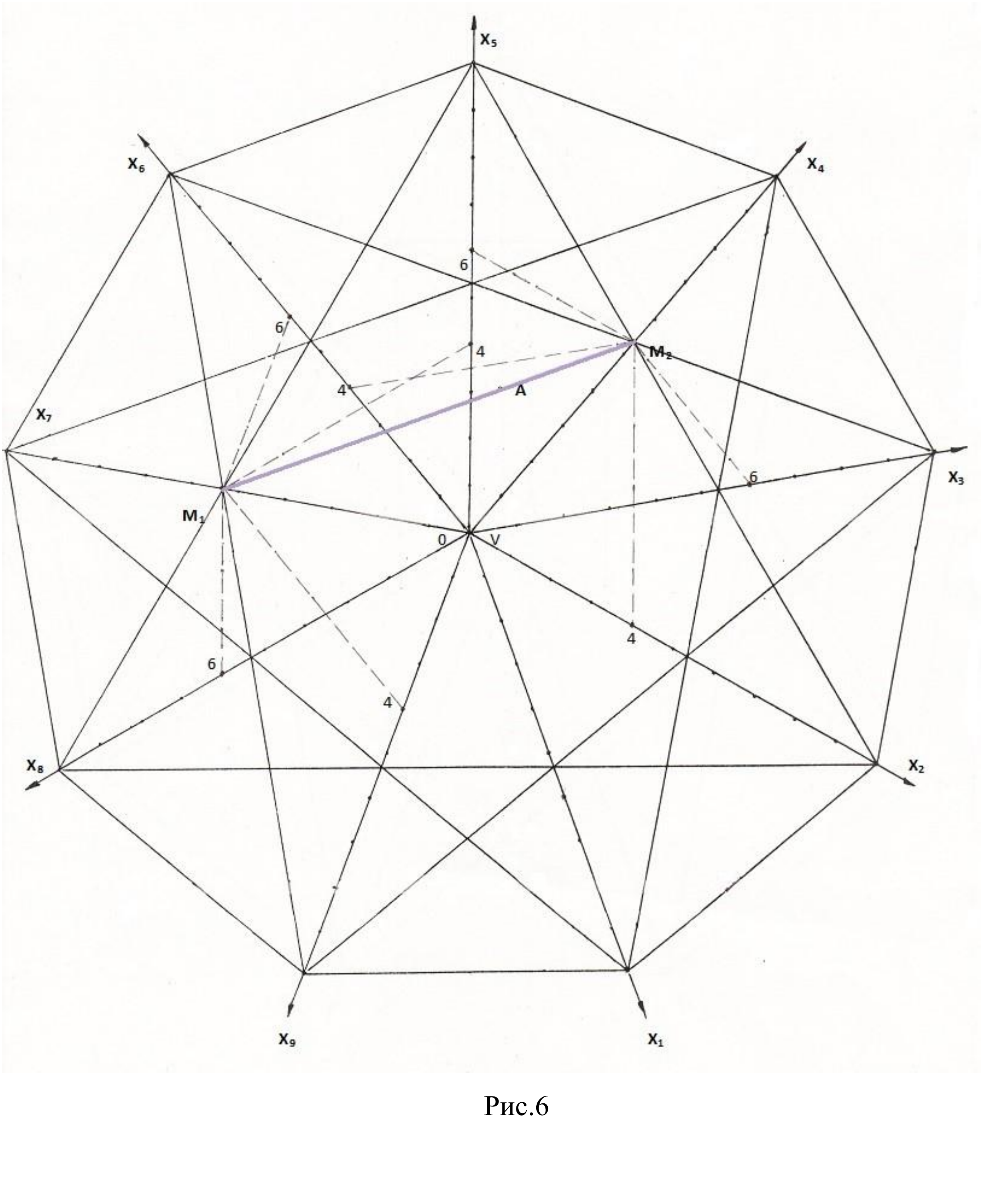

Рис.6

Пояснения к рисунку 6:
- на рисунке видны три наложенных друг на друга треугольника – $\boldsymbol{X_1X_4X_7}$, $\boldsymbol{X_2X_5X_8}$ и $\boldsymbol{X_3X_6X_9}$,
- прямая $\boldsymbol{M_1M_2}$ - произвольная прямая, каноническое уравнение которой необходимо составить по двум точкам прежде всего,
- т. $\boldsymbol{A}$ – произвольная точка на прямой $\boldsymbol{M_1M_2}$, координаты которой требуется определить,
- штриховые прямые – указатели координат точек $\boldsymbol{M_1}$ и $\boldsymbol{M_2}$.

Решение

1. Составим каноническое уравнение прямой $\boldsymbol{M_1M_2}$. Для этого определим вначале координаты точек $\boldsymbol{M_1}$ и $\boldsymbol{M_2}$ (рис.6). Они таковы:

Пояснения к рис.6: точки $\boldsymbol{M_1}$ и $\boldsymbol{M_2}$ в пересечениях плоскостей $\boldsymbol{X_3OX_5}$, $\boldsymbol{X_4OX_6}$ и $\boldsymbol{X_3OX_1}$, $\boldsymbol{X_2OX_4}$ соответственно, поэтому их координаты будут результатом показаний всех координатных осей этих плоскостей.

$$\boldsymbol{M_1(0;\,0;\,0;\,0;\,4;\,6;\,0;\,6;\,4)} \text{ и } \boldsymbol{M_2(0;\,4;\,6;\,0;\,6;\,4;\,0;\,0;\,0)}.$$

По этим двум точкам определим направляющий вектор. Он будет иметь вид:

$$\overline{\boldsymbol{M_1M_2}}\boldsymbol{(x_{21}-x_{11};\, x_{22}-x_{12};\, x_{23}-x_{13};\, x_{24}-x_{14};\, x_{25}-x_{15};\, x_{26}-x_{16};\, x_{27}-x_{17};\, x_{28}-x_{18};\, x_{29}-x_{19})},$$

т. е.

$$\overline{\boldsymbol{M_1M_2}}\boldsymbol{(0-0;\, 4-0;\, 6-0;\, 0-0;\, 6-4;\, 4-6;\, 0-0;\, 0-6;\, 0-4)},$$

В итоге $\overline{\boldsymbol{M_1M_2}}\boldsymbol{(0;\, 4;\, 6;\, 0;\, 2;\, -2;\, 0;\, -6;\, -4)}$

Теперь можно записать уравнение прямой, проходящей через эти точки -

$$\boldsymbol{M_1(0;\,0;\,0;\,0;\,4;\,6;\,0;\,6;\,4)} \text{ и } \boldsymbol{M_2(0;\,4;\,6;\,0;\,6;\,4;\,0;\,0;\,0)}.$$

$$\frac{x1-0}{0}=\frac{x2-0}{4}=\frac{x3-0}{6}=\frac{x4-0}{0}=\frac{x5-4}{2}=\frac{x6-6}{-2}=\frac{x7-0}{0}=\frac{x8-6}{-6}=\frac{x9-4}{-4}$$

Примечание: здесь индексы координат ($_1$, $_2$, $_3$, $_4$, $_5$, $_6$, $_7$, $_8$ и $_9$) оказались выше роста своих обладателей – не позволяет сделать это правильно их необходимое присутствие в формульных записях - но воспринимать их надо как ростом ниже.

Проверка:

Подставим координаты точки ***M₁(0; 0; 0; 0; 4; 6; 0; 6; 4)*** в полученные уравнения:

$$\frac{0-0}{0}=\frac{0-0}{4}=\frac{0-0}{6}=\frac{0-0}{0}=\frac{4-4}{2}=\frac{6-6}{-2}=\frac{0-0}{0}=\frac{6-6}{-6}=\frac{4-4}{-4}$$

$$0 = 0 = 0 = 0 = 0 = 0 = 0 = 0 = 0$$

Получены верные равенства. Уравнение верное.

Подставим координаты точки ***M₂(0; 4; 6; 0; 6; 4; 0; 0; 0)*** в полученные уравнения:

$$\frac{0-0}{0}=\frac{4-0}{4}=\frac{6-0}{6}=\frac{0-0}{0}=\frac{6-4}{2}=\frac{4-6}{-2}=\frac{0-0}{0}=\frac{0-6}{-6}=\frac{0-4}{-4}$$

$$1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1$$

Получены верные равенства. Уравнение верное.

2. Определим координаты в рамках треугольника, имеющего индексацию координатных осей 3, 6 и 9 (рис.7).

Пояснения к рис.7:

- основание красного треугольника параллельно прямой X_3X_6,
- основание синего треугольника параллельно прямой X_3X_9,
- основание зелёного треугольника параллельно прямой X_6X_9,
- все катеты цветных треугольников параллельны соответствующим координатным осям.

Из рис.7 видно, что в данном треугольнике точка A имеет координаты: $x_3 = 4.2$, $x_6 = 4.6$, $x_9 = 1.2$

3. Определим координаты в рамках треугольника, имеющего индексацию координатных осей 1, 4 и 7 (рис.8).

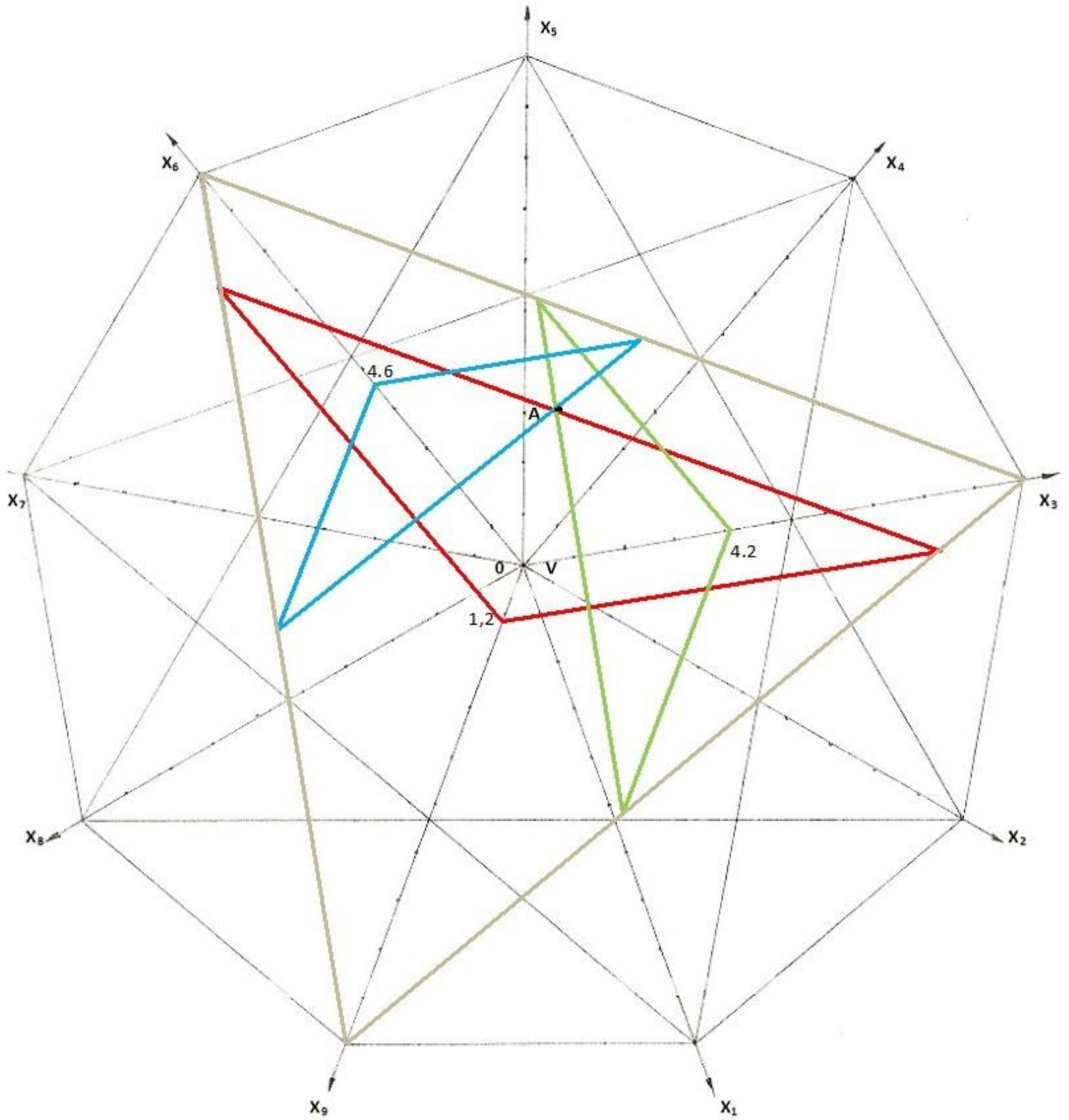

Рис.7

Пояснения к рис.8:

- основание красного треугольника параллельно прямой X_1X_4,
- основание синего треугольника параллельно прямой X_1X_7,

- основание зелёного треугольника параллельно прямой X_4X_7,
- все катеты цветных треугольников параллельны соответствующим координатным осям.

Из рис.8 видно, что в данном треугольнике точка ***A*** имеет координаты: $x_1 = 1.6$, $x_4 = 5$, $x_7 = 3.4$

4. Определим координаты в рамках треугольника, имеющего индексацию координатных осей 2, 5 и 8 (рис.9).

Пояснения к рис.9:

- основание красного треугольника параллельно прямой X_2X_5,
- основание синего треугольника параллельно прямой X_2X_8,
- основание зелёного треугольника параллельно прямой X_5X_8,
- все катеты цветных треугольников параллельны соответствующим координатным осям.

Из рис.9 видно, что в данном треугольнике точка ***A*** имеет координаты: $x_2 = 2.8$, $x_5 = 5.4$, $x_8 = 1.8$

Таким образом, мы имеем полный набор координат точки ***A***.

A(1.6; 2.8; 4.2; 5; 5.4; 4.6; 3.4; 1.8; 1.2)

Проверим правильность определения координат путём их подстановки в уравнение прямой.

$$\frac{1.6-0}{0}=\frac{2.8-0}{4}=\frac{4.2-0}{6}=\frac{5-0}{0}=\frac{5.4-4}{2}=\frac{4.6-6}{-2}=\frac{3.4-0}{0}=\frac{1.8-6}{-6}=\frac{1.2-4}{-4}$$

$$\infty = 0.7 = 0.7 = \infty = 0.7 = 0.7 = \infty = 0.7 = 0.7$$

Примечание: значки ∞ без их значимости присутствуют в силу специфичности заданных исходных данных для примера.

Составляющие уравнения равны друг другу. Значит координаты точки верны, а отсюда – методика их определения также верна.

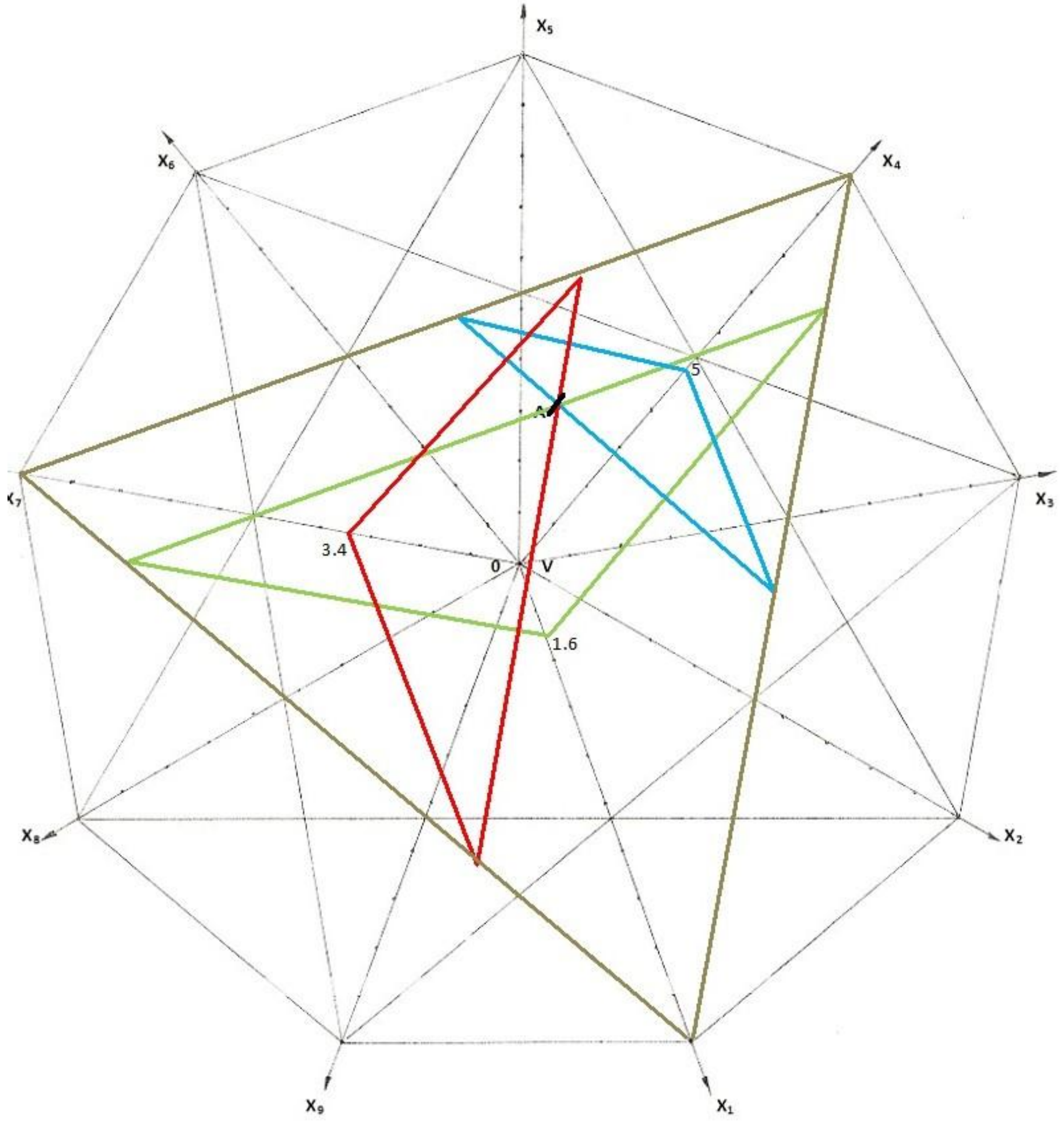

Рис.8

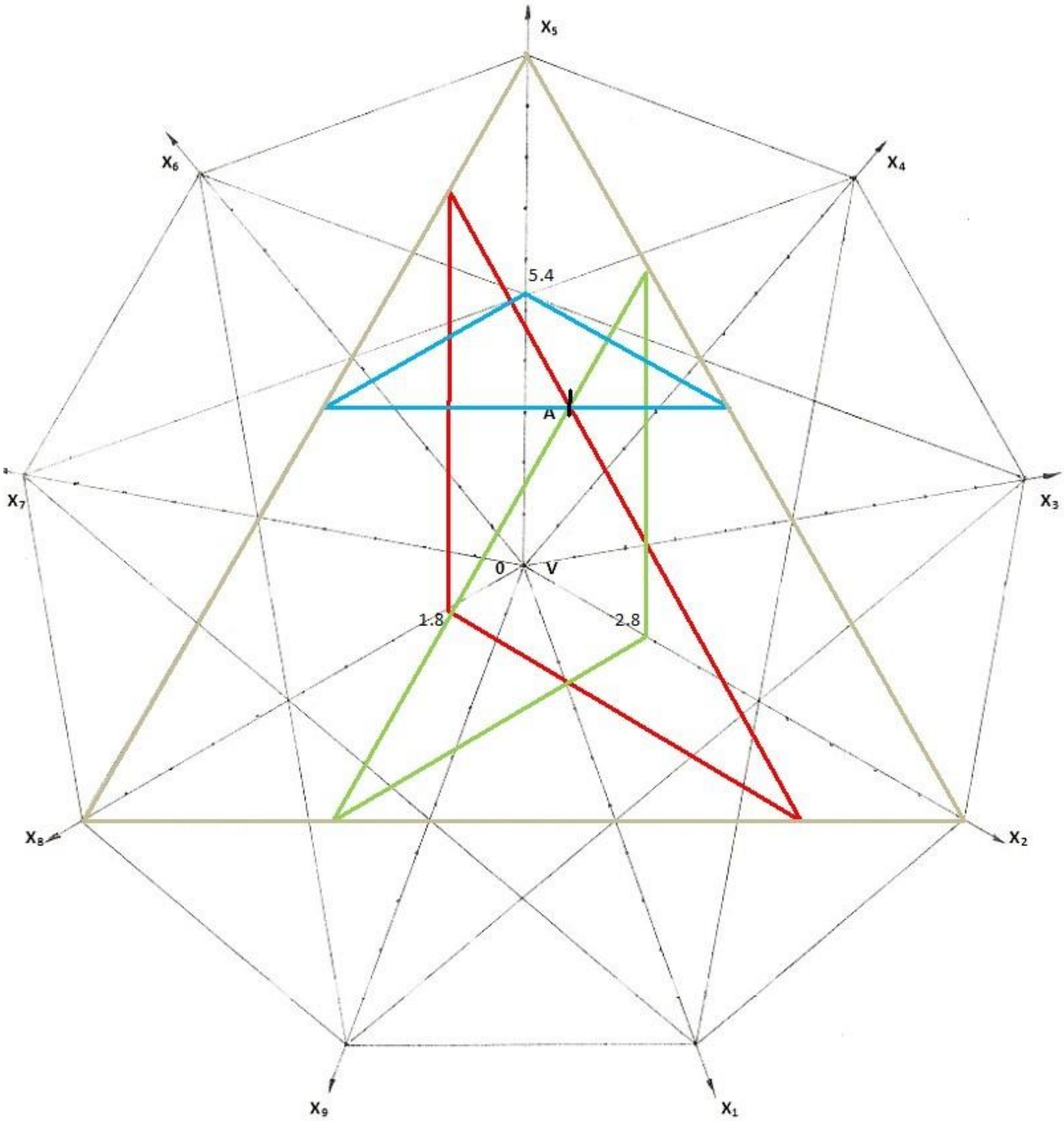

Рис.9

Можно подвести небольшой итог:

Координаты произвольной точки, находящейся в пространстве произвольно-угольной системы координат размерностей 3, 6, 9 … (т. е. кратных трём) определяются по методике, изложенной для её трёхмерного пространства по одному, двум, трём и т. д. (соответственно) этапам.

Конец статьи