Примеры графического решения систем из четырёх линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными в пространстве четырёхмерной произвольно-угольной системы координат

Вступление

В опубликованной (см. сайт автора **optimat.ucoz.ru**) ранее авторской работе «Реальная многомерная произвольно-угольная система координат» высказана основная мысль, что реальная многомерная произвольно-угольная система координат, им разработанная, является развитием ныне известной прямоугольной Декартовой системы координат. Её правомочность он попытался в этой работе доказать на графических примерах решения систем линейных алгебраических уравнений именно с её помощью. Но, как часто бывает при становлении новой идеи, её исследование не было (да и будет ли когда) доведено до конца. За это время были найдены её некоторые дополнительные возможности, на основе которых и приведено несколько примеров решения более сложных систем уравнений.

При её написании автор также учёл опубликованные в Интернете пожелания читателей математических статей о том, чтобы такие, особенно на тему многомерности, статьи подкреплялись достаточным количеством рисунков. Упомянутая выше главная работа имеет рисунков достаточно. В этой работе они тоже имеются: нельзя согласиться с неким автором, который в своей статье, размещённой в Интернете, говорит «Свойства такого гиперкуба *(речь идёт о многомерности)* запросто **вычисляются** из приведённых уравнений - совсем не обязательно стараться представить себе, как эта хреновина выглядит... » Хлеба и зрелищ … Пусть хлеб — вычисления, а зрелища — доходчивые рисунки. Одно без другого существовать не может. Конечно, могут существовать определённые преграды к графическому пояснению математической идеи — нет абстрактного мышления, нет навыков в начертании рисунков, нет аппарата постижения сущности, требующей графического исполнения.

С аналогичным мнением высказывается и автор другой статьи о многомерности, также представленной в Интернете: «Увидеть – в буквальном, физическом смысле этого слова – фигуры в четырёхмерном пространстве (а тем более в пространствах большего числа измерений) не в состоянии никто, даже самый гениальный математик; их можно видеть только мысленным взором.»

В данной статье приведены три характерных примера решения систем линейных алгебраических уравнений в пространстве реальной 4-мерной произвольно-угольной системы координат. И именно - с показом этих решений на таких конкретных рисунках.

Примечание 1:

Автор счёл необходимым предупредить читателя о том, что из двух приёмов начертания рисунков (первый – ручной, более точный, но менее аккуратный, машинный – более аккуратный, но менее точный) выбрал второй. Поэтому при обзоре рисунков необходимо полагаться прежде всего на их числовые параметры, оставляя их графическим элементам лишь роль предоставления созерцательности, но не в качестве инструмента для вычислений!

Примечание 2:

- Необходимые сведения о методике построения образа уравнения, а также – о методике определения координат точки, можно почерпнуть на сайте автора **optimat.ucoz.ru** (статьи «Реальная многомерная произвольно-угольная система координат» и “Теория определения координат точки, находящейся в пространстве 4- и 8-мерной произвольно-угольной системы координат ” соответственно).

Единая стратегия решения 1-го и 2-го примеров:

1. Находим линию пересечения образов первого и второго уравнений - ***MN***,
2. Находим линию пересечения образов третьего и четвёртого уравнений - ***KL***,
3. Находим точку пересечения линий ***MN*** и ***KL*** (точку решения - ***A***),
4. Определяем координаты (величины неизвестных) точки ***A***,
5. Проверяем правильность решения.

Пример 1. Решить графическим методом систему из четырёх линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными в пространстве 4-мерной произвольно-угольной системы координат (рисунки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8).

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 18 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 18 \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 18 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 18 \end{cases}$$

Решение примера 1

1. Находим линию пересечения образов первого и второго уравнений – ***MN*** (рисунки 1 и 2).

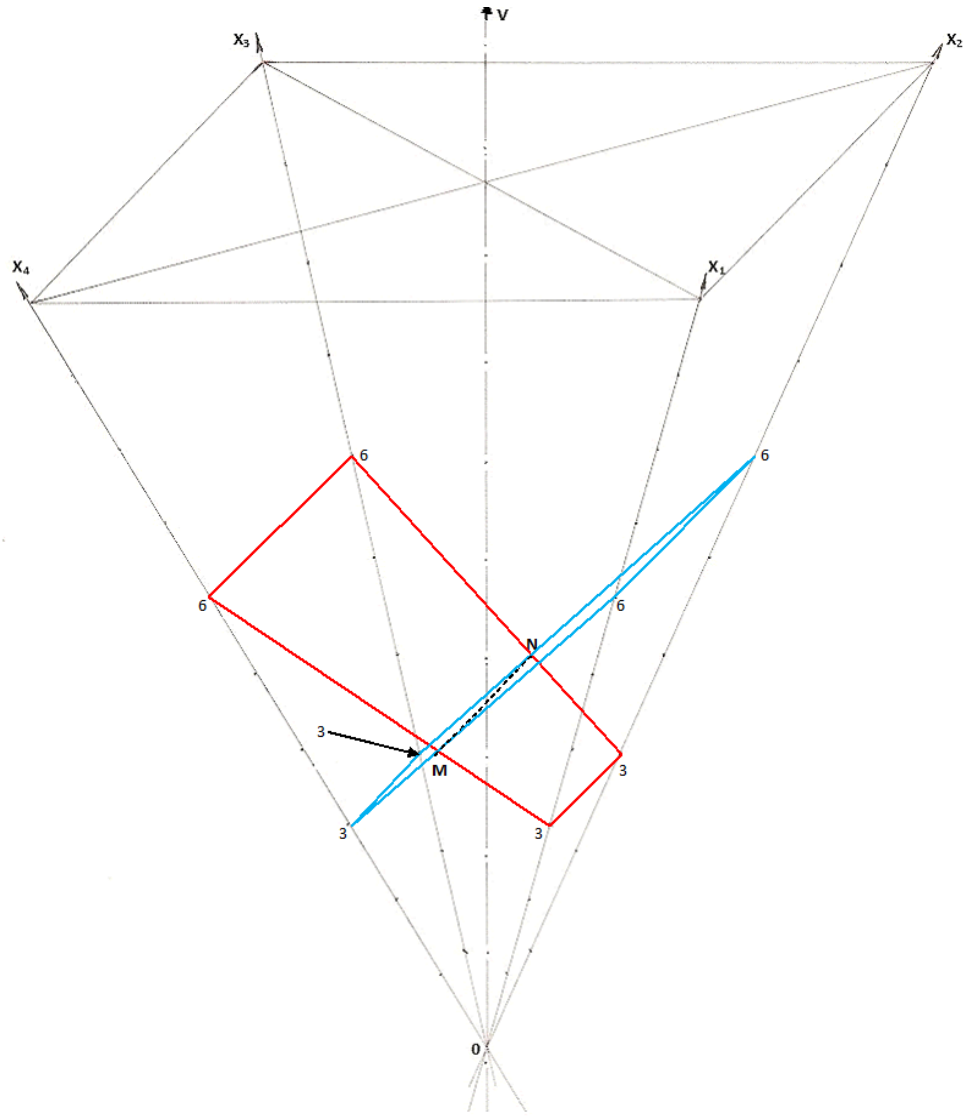

Рис.1

Аксонометрический рисунок,
показывающий взаимодействие
первого (красный контур) и
второго (голубой контур) уравнений.

<u>Пояснения к рисункам 1 и 2</u>:

- Прямая ***MN*** - линия пересечения образов первого и второго уравнений,

- Красный контур – образ первого уравнения,
- Голубой контур – образ второго уравнения.
- Цифры около координатных осей – координаты соответствующих точек, участвующих в построении образов уравнений.

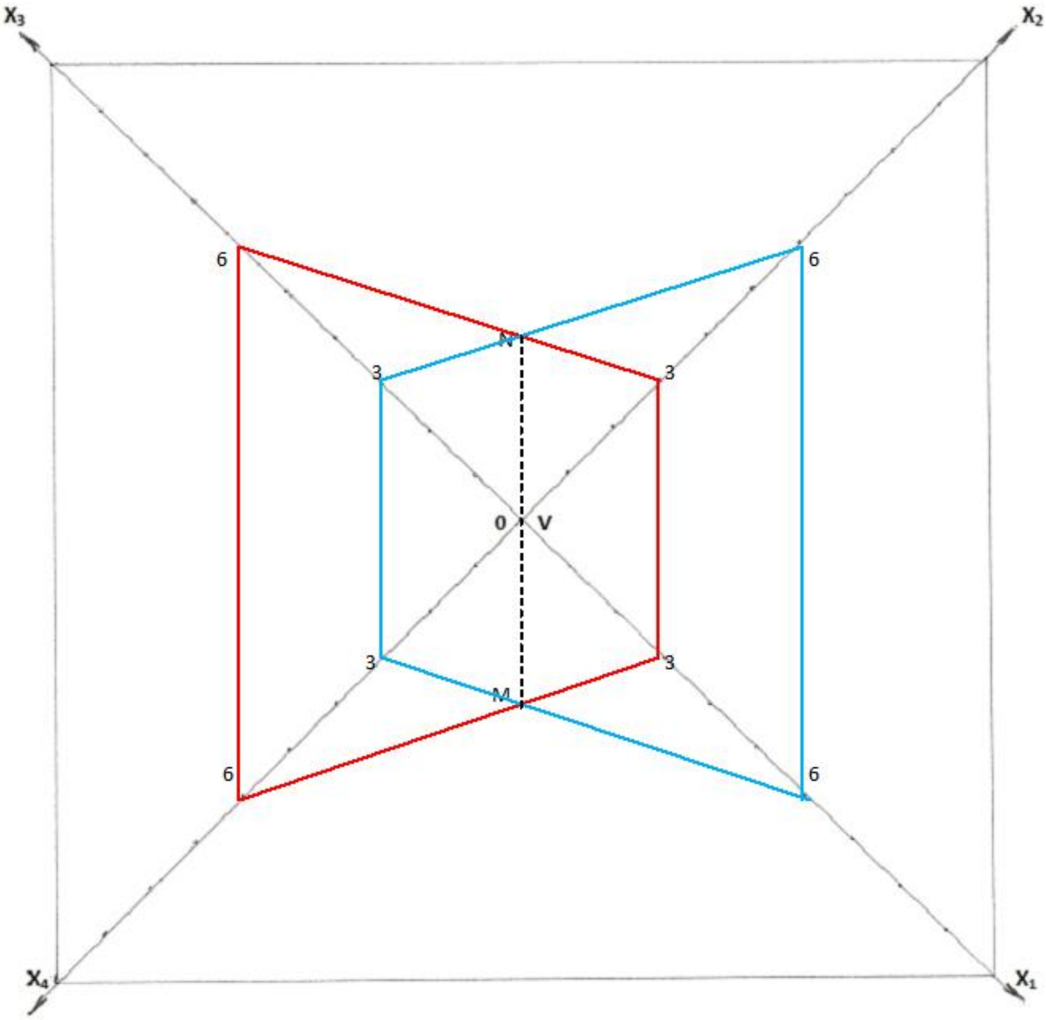

Рис.2

Планиметрический рисунок,
показывающий взаимодействие
первого (красный контур) и
второго (голубой контур) уравнений.

2. Находим линию пересечения образов третьего и четвёртого уравнений – ***KL*** (рисунки 3 и 4).

<u>Пояснения к рисункам 3 и 4</u>:

- Прямая ***KL*** является линией пересечения образов третьего и четвёртого уравнений,

- Сиреневый контур – образ третьего уравнения,

- Оранжевый контур – образ четвёртого уравнения.

- Цифры около координатных осей – координаты соответствующих точек, участвующих в построении образов уравнений.

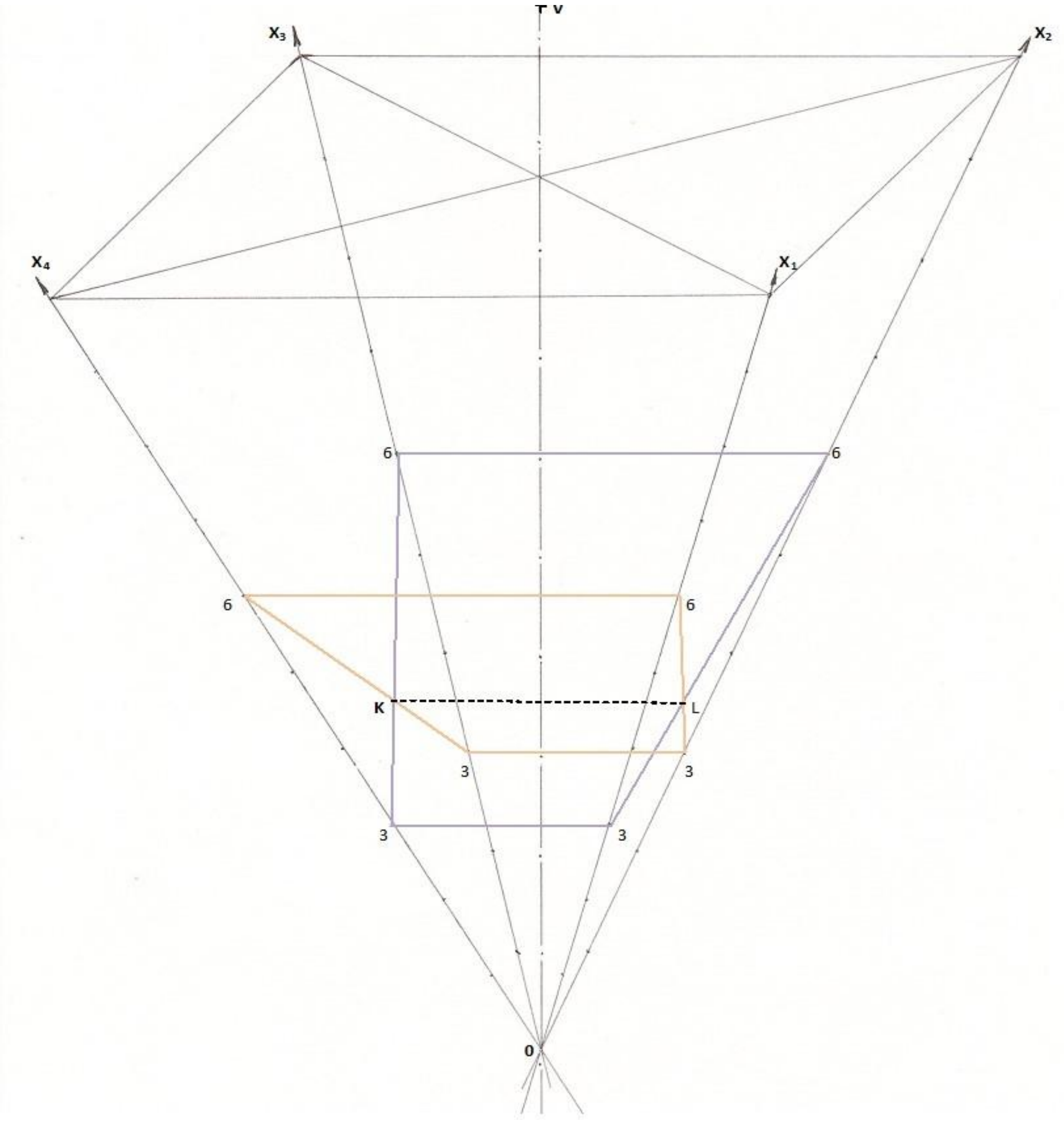

Рис.3

Аксонометрический рисунок, показывающий взаимодействие третьего (сиреневый контур) и четвёртого (оранжевый контур) уравнений.

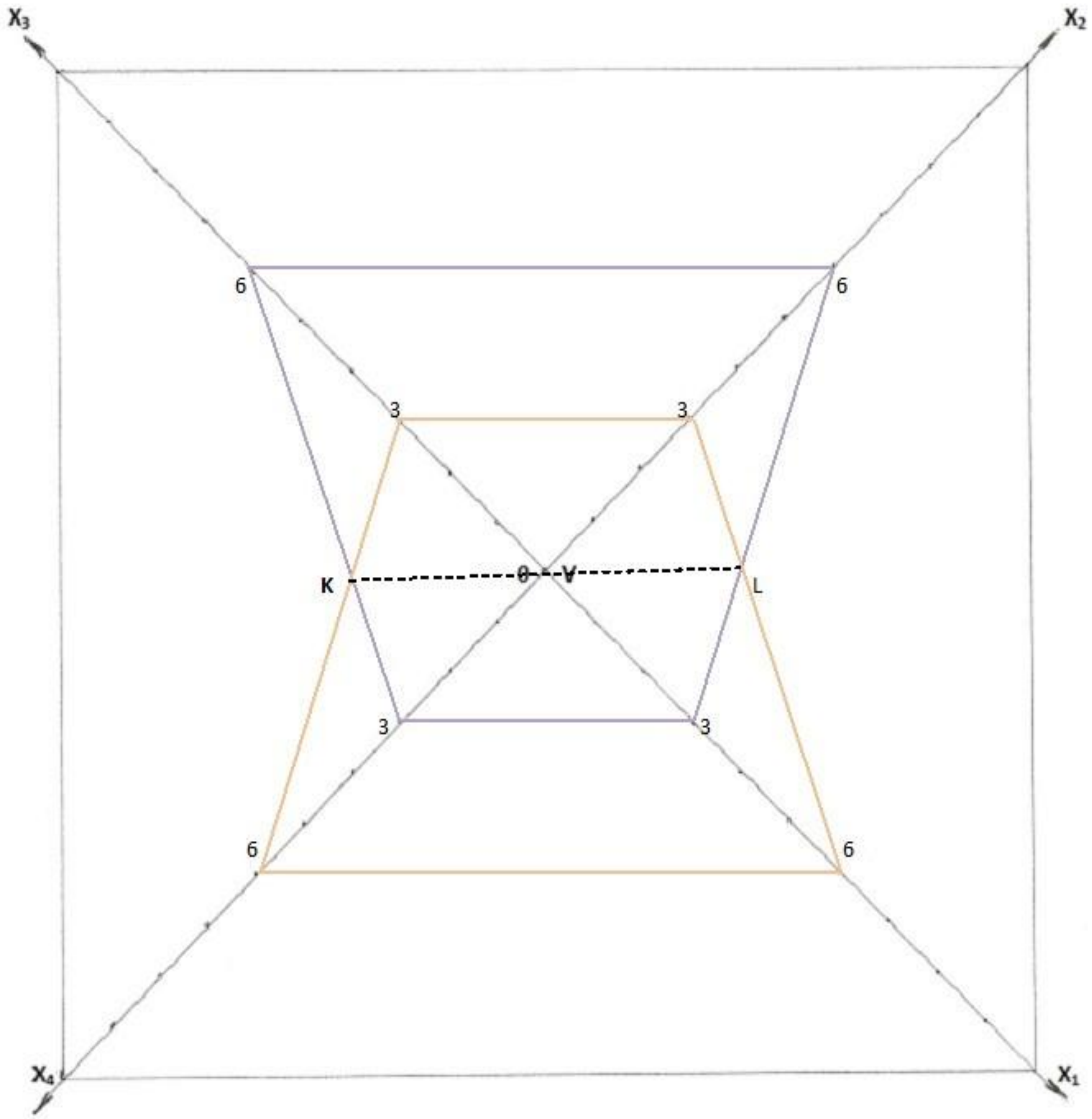

Рис.4

Планиметрический рисунок, показывающий взаимодействие третьего (сиреневый контур) и четвёртого (оранжевый контур) уравнений.

3. Находим точку пересечения линий ***MN*** и ***KL*** как точку решения – ***A*** (рисунки 5 и 6).

Пояснения к рисункам 5 и 6:

- Прямая ***MN*** - линия пересечения образов первого и второго уравнений,
- Прямая ***KL*** - линия пересечения образов третьего и четвёртого уравнений,
- Зелёный контур ***BCDE*** – вспомогательный,
- ***A*** – точка пересечения прямых ***MN*** и ***KL*** как точка решения,

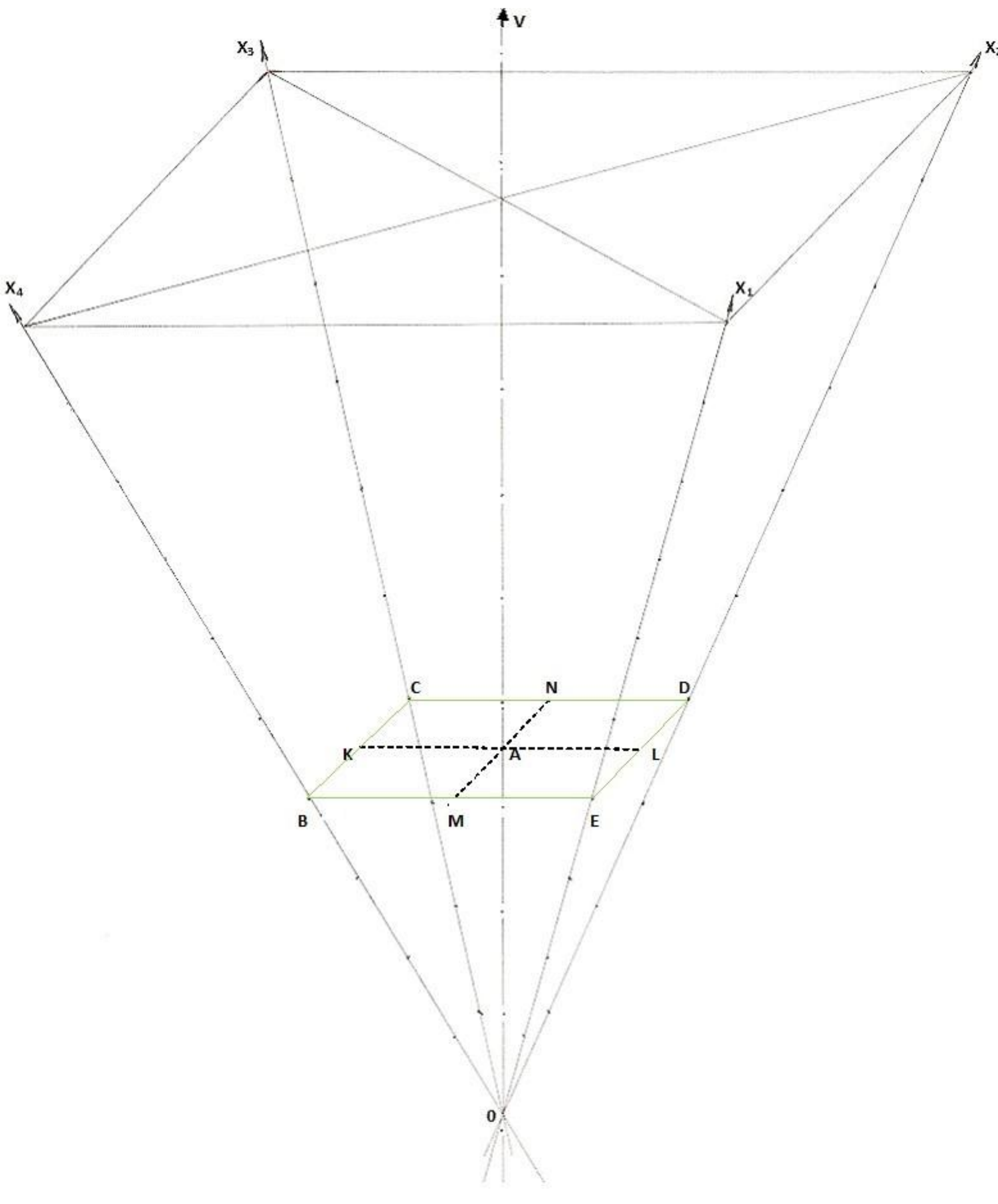

Рис.5

Аксонометрический рисунок, показывающий получение точки решения ***A***

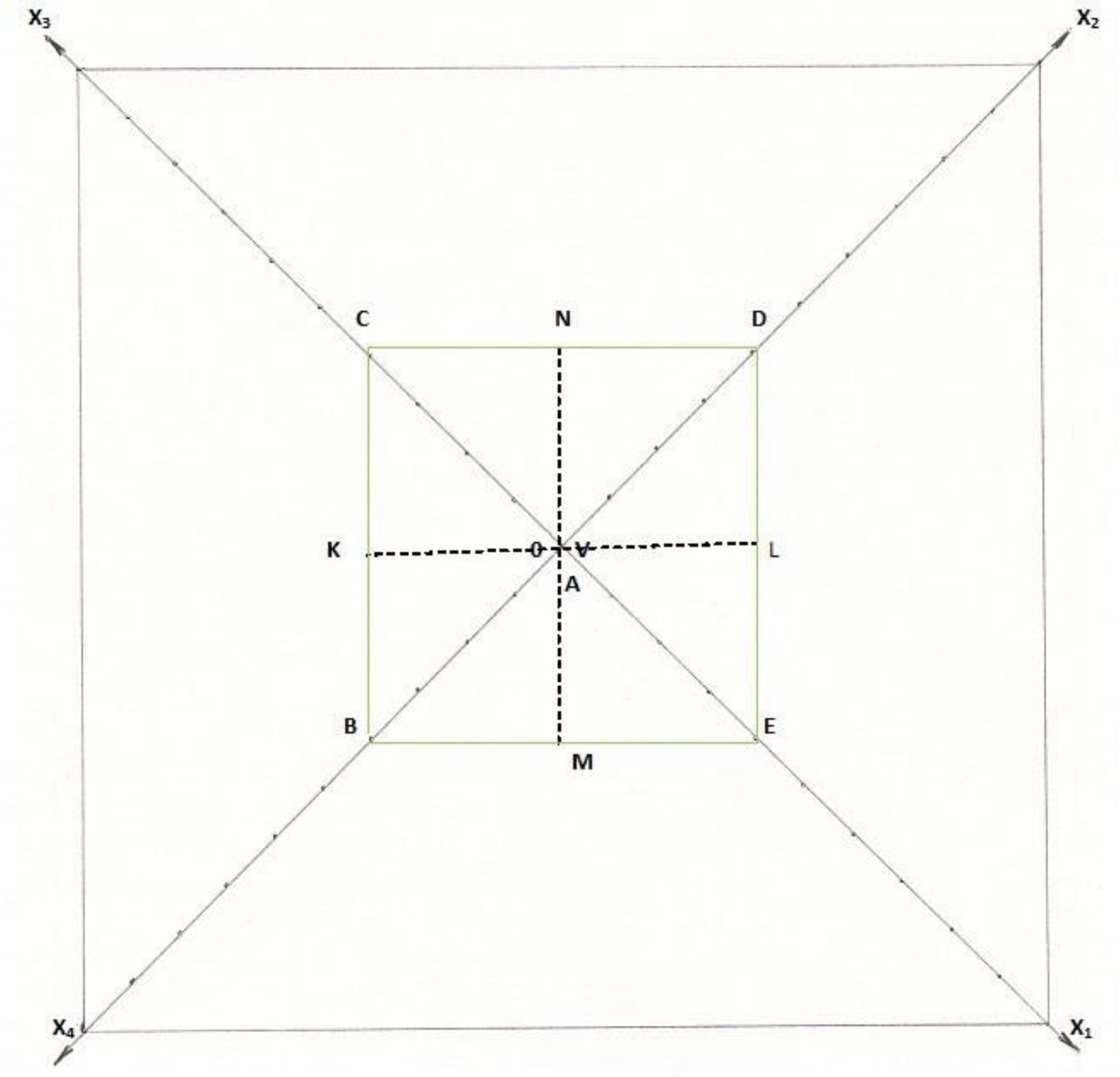

Рис.6

Планиметрический рисунок, показывающий
получение точки решения ***A***

4. Определяем координаты (величины неизвестных) точки ***A*** (рисунки 7 и 8).

<u>Пояснения к рисункам 7 и 8:</u>

- Прямая ***MN*** - линия пересечения образов первого и второго уравнений,
- Прямая ***KL*** - линия пересечения образов третьего и четвёртого уравнений,

- Зелёный контур ***BCDE*** – вспомогательный,
- ***A*** – точка пересечения прямых ***MN*** и ***KL*** как точка решения,
- Цифры на координатных осях – координаты точки ***A.***

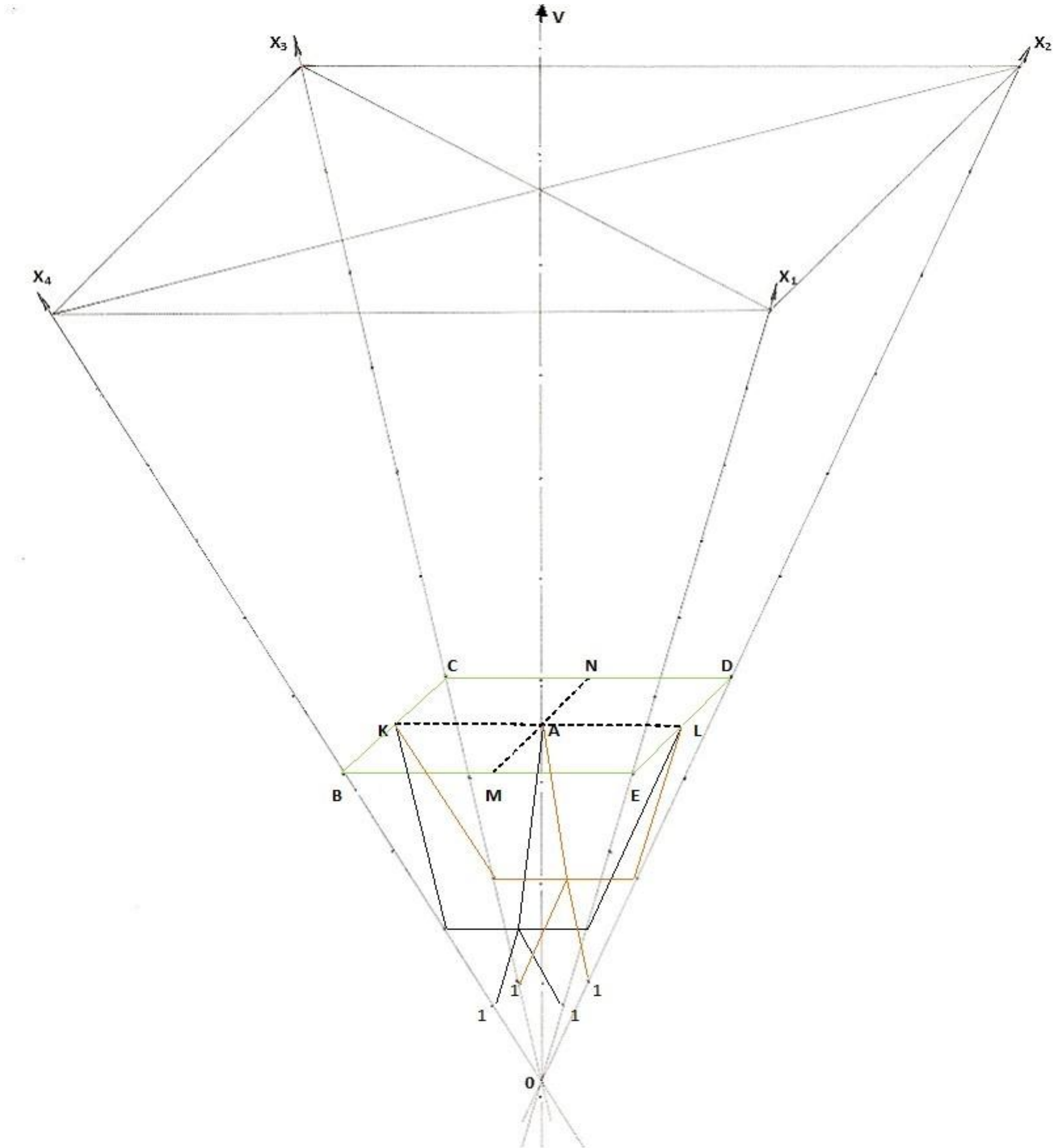

Рис.7

Аксонометрический рисунок, показывающий определение координат точки решения - ***A***

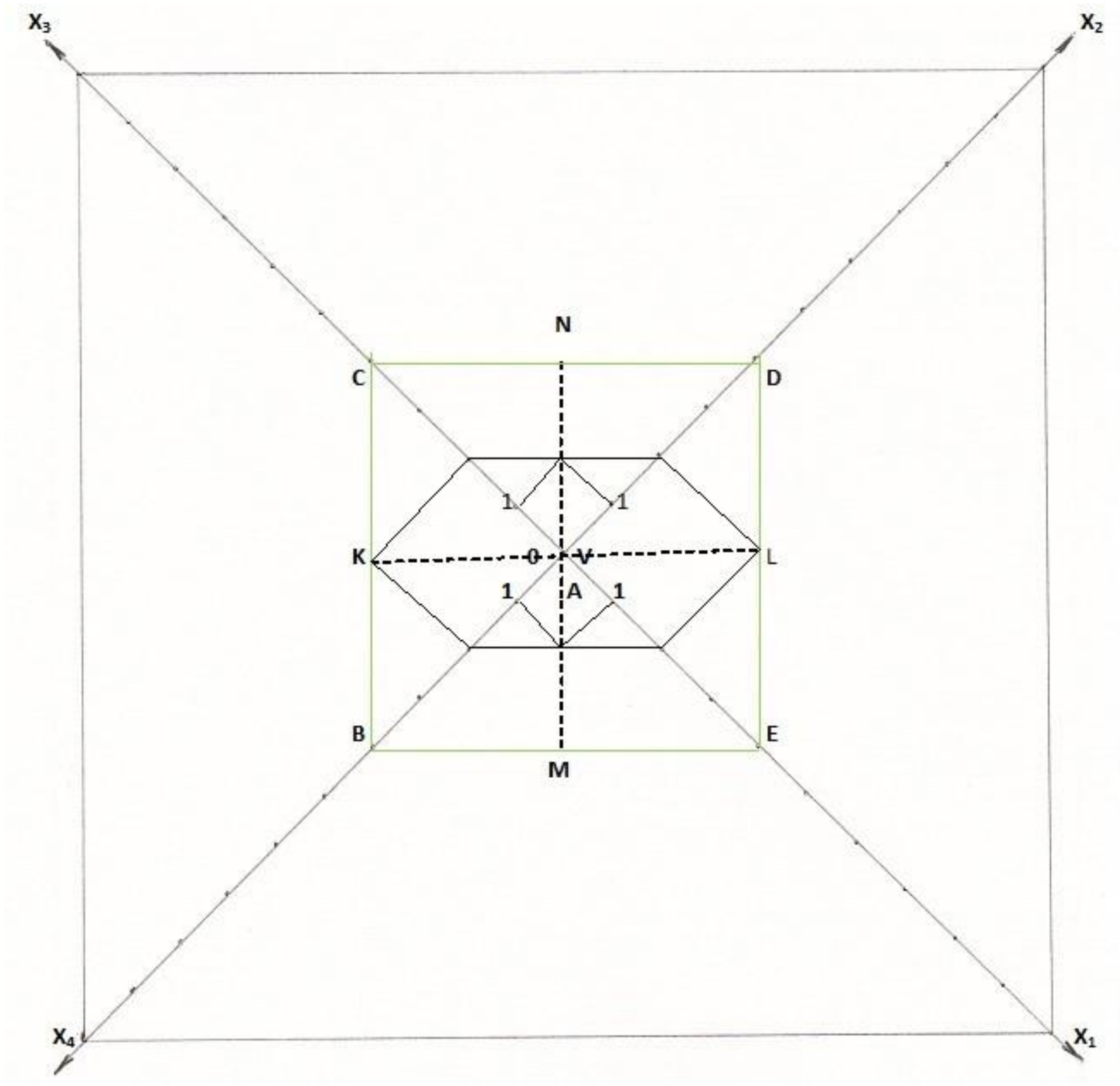

Рис.8

Планиметрический рисунок, показывающий
определение координат точки решения - ***A***

Рисунки 7 и 8 показывают, что координаты точки ***A***, как точки решения, таковы:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 1$$

Они и могут явиться решением данной системы уравнений. Необходима проверка.

5. Проверяем правильность решения.

Подставим в каждое уравнение системы значения найденных координат:

$$\begin{cases} 6 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 18 \\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 18 \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 18 \\ 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 18 \end{cases}$$

Равенства не нарушены. Значит, координаты точки ***A*** являются найденными величинами неизвестных, удовлетворяющими каждому уравнению системы, т. е.

$$\boldsymbol{x_1} = 1; \quad \boldsymbol{x_2} = 1; \quad \boldsymbol{x_3} = 1; \quad \boldsymbol{x_4} = 1$$

Пример 1 считается решённым.

Пример 2. Решить графическим методом систему из четырёх линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными в пространстве 4-мерной произвольно-угольной системы координат (рисунки 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 и 16).

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 18 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 18 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 12 \\ 3.8x_1 + 6.1x_2 + 6.1x_3 + 3.8x_4 = 22.1 \end{cases}$$

Решение примера 2

1. Находим линию пересечения образов первого и второго уравнений – ***MN*** (рисунки 9 и 10).

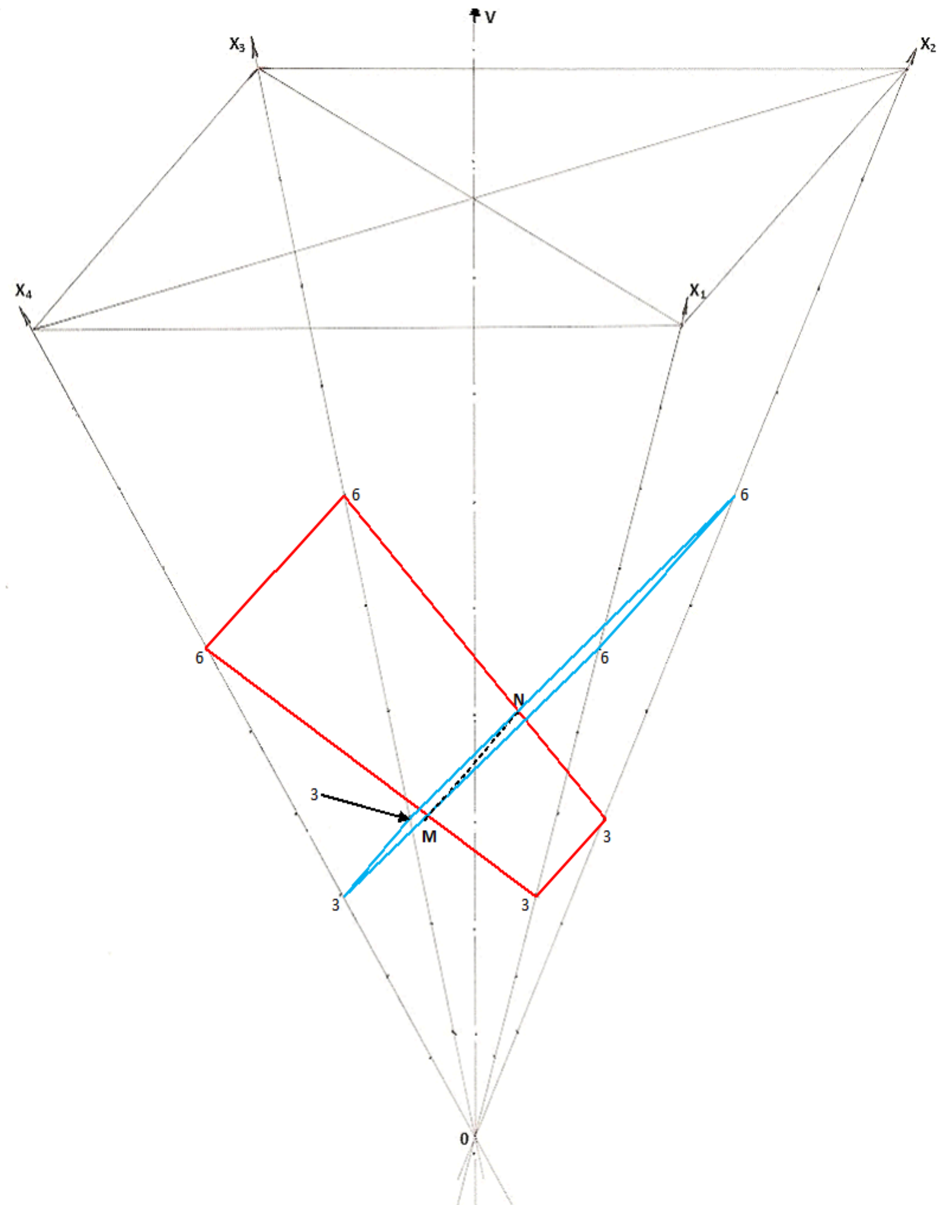

Рис.9

Аксонометрический рисунок, показывающий взаимодействие первого (красный контур) и второго (голубой контур) уравнений.

Пояснения к рисункам 9 и 10:

- Прямая ***MN*** - линия пересечения образов первого и второго уравнений,

- Красный контур – образ первого уравнения,
- Голубой контур – образ второго уравнения.
- Цифры около координатных осей – координаты соответствующих точек, участвующих в построении образов уравнений.

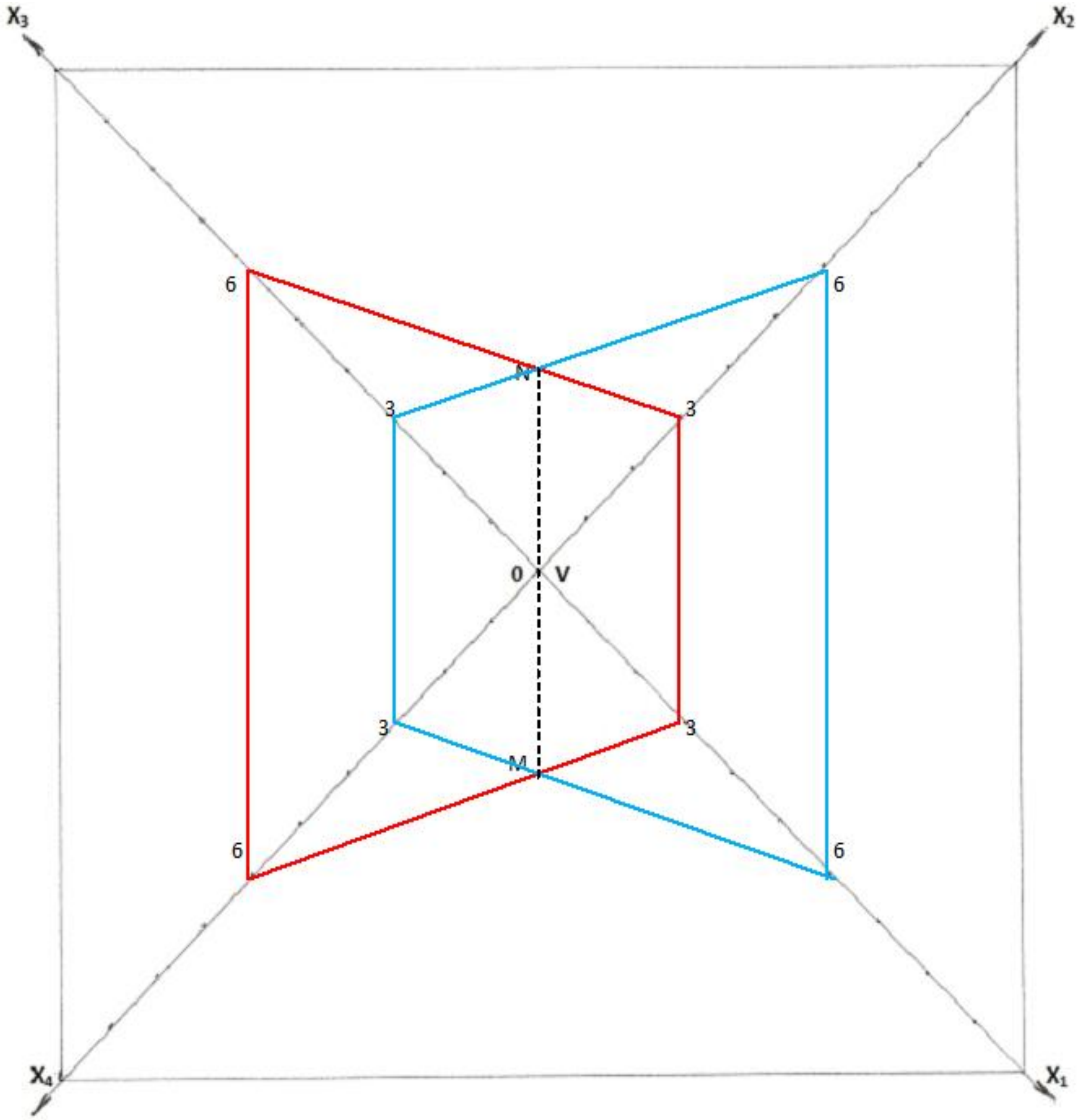

Рис.10

Планиметрический рисунок, показывающий взаимодействие уравнений первого (красный контур) и второго (голубой контур).

2. Находим линию пересечения образов третьего и четвёртого уравнений – ***KL*** (рисунки 11 и 12).

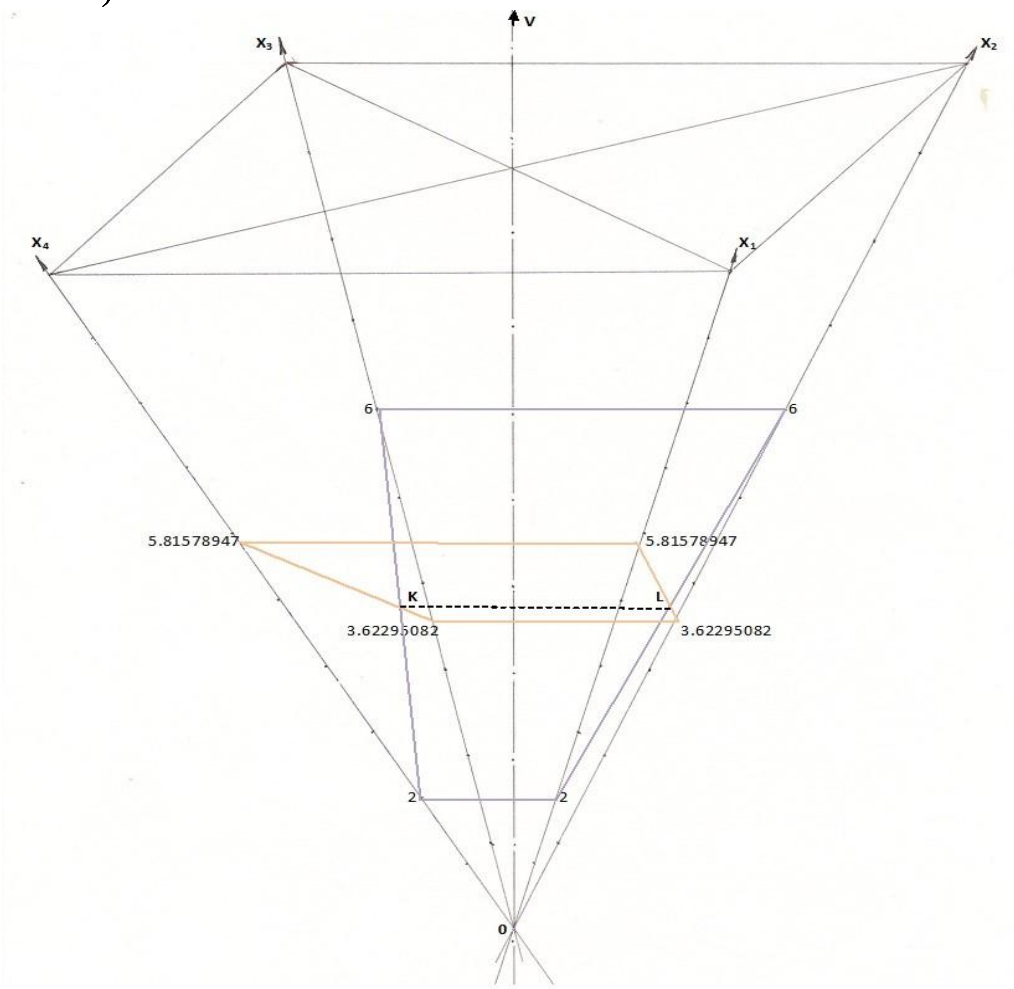

Рис.11

Аксонометрический рисунок, показывающий взаимодействие уравнений третьего (сиреневый контур) и четвёртого (оранжевый контур).

<u>Пояснения к рисункам 11 и 12:</u>

- Прямая ***KL*** является линией пересечения образов третьего и четвёртого уравнений,
- Сиреневый контур – образ третьего уравнения,
- Оранжевый контур – образ четвёртого уравнения.
- Цифры около координатных осей – координаты соответствующих точек, участвующих в построении образов уравнений.

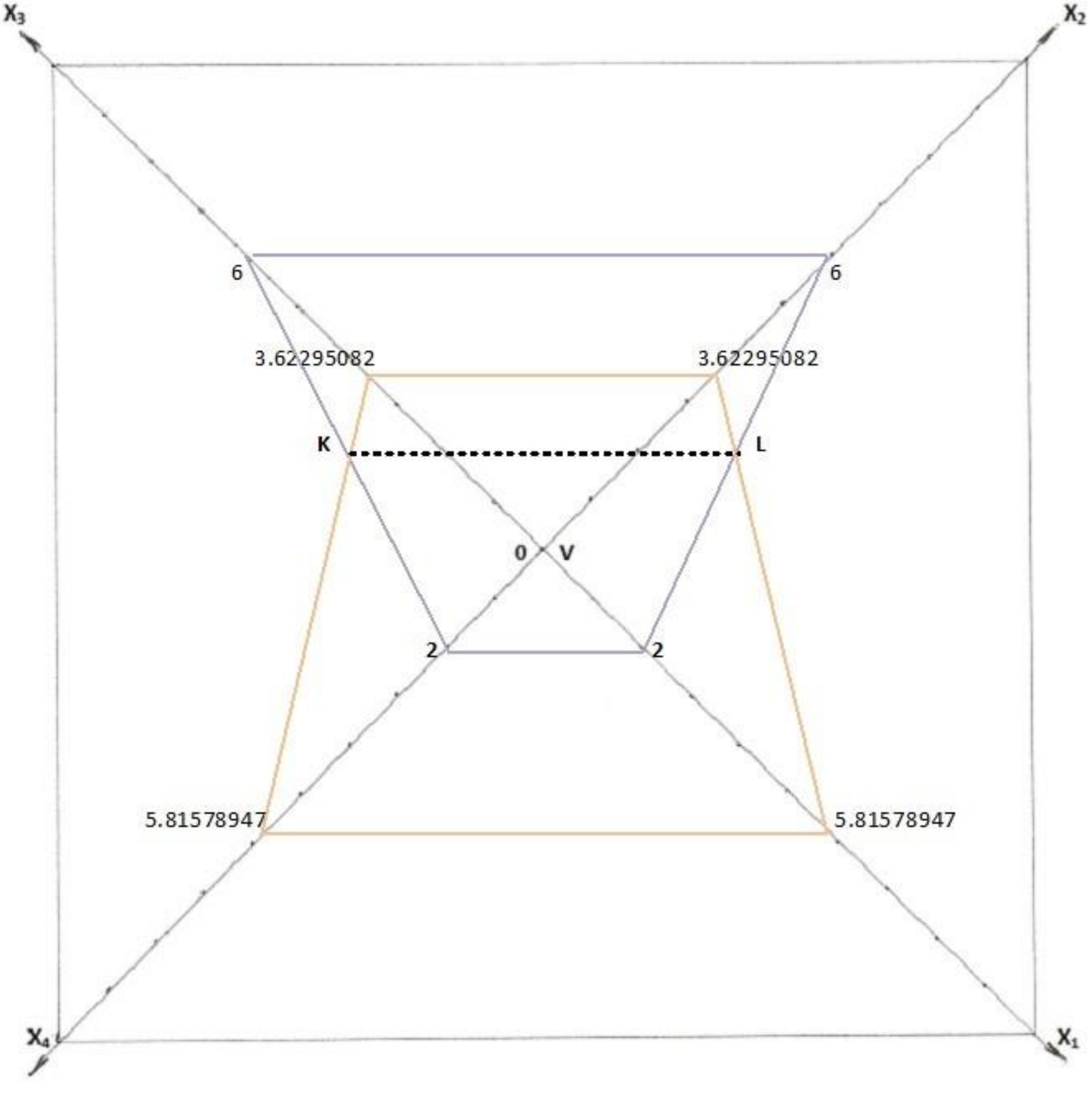

Рис.12

Планиметрический рисунок, показывающий
взаимодействие третьего (сиреневый контур)
и четвёртого (оранжевый контур) уравнений.

3. Находим точку пересечения линий $\boldsymbol{MN}$ и $\boldsymbol{KL}$ (точку решения - $\boldsymbol{A}$),

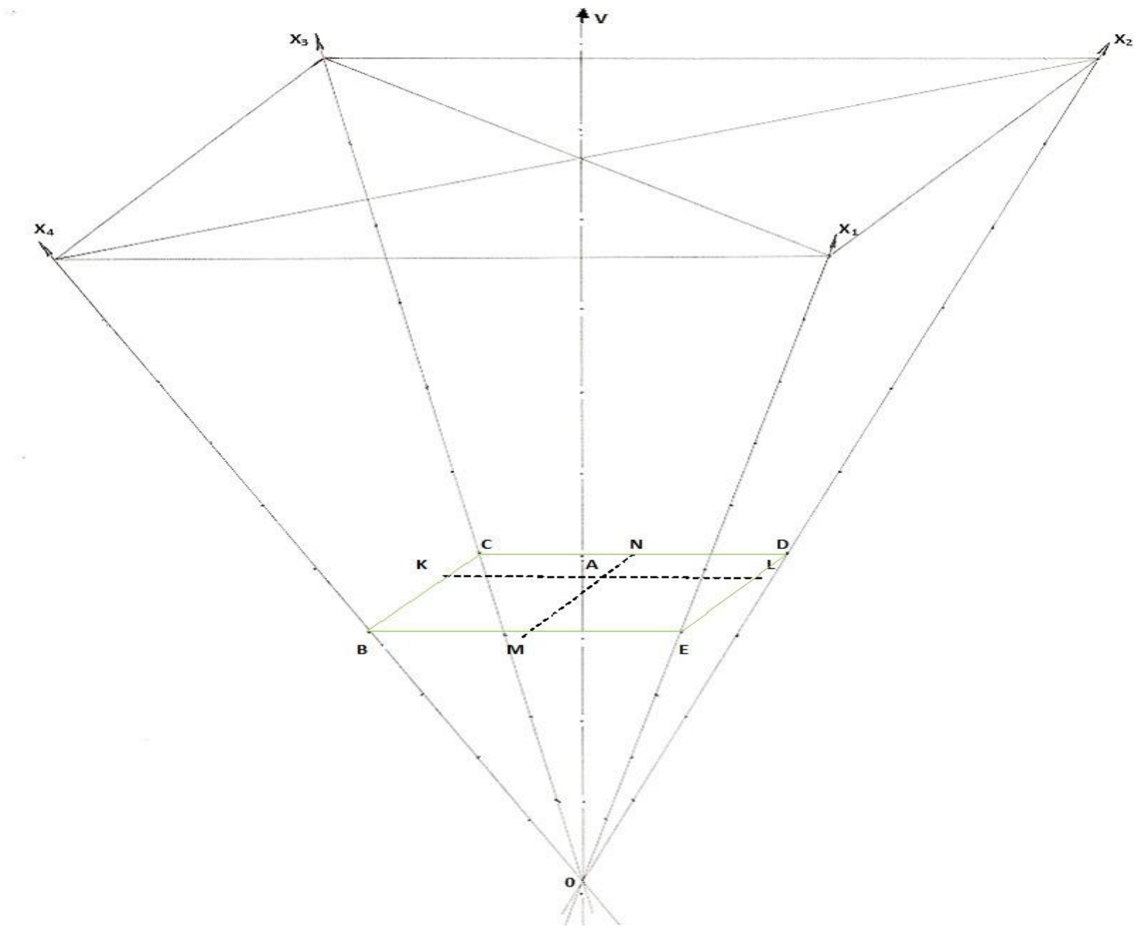

Рис.13

Аксонометрический рисунок, показывающий пересечение линий взаимодействия первой и второй пар уравнений.

<u>Пояснения к рисункам 13 и 14:</u>

- Прямая $\boldsymbol{MN}$ является линией пересечения образов первого и второго уравнений,

- Прямая $\boldsymbol{KL}$ является линией пересечения образов третьего и четвёртого уравнений,

- $\boldsymbol{A}$ – точка решения.

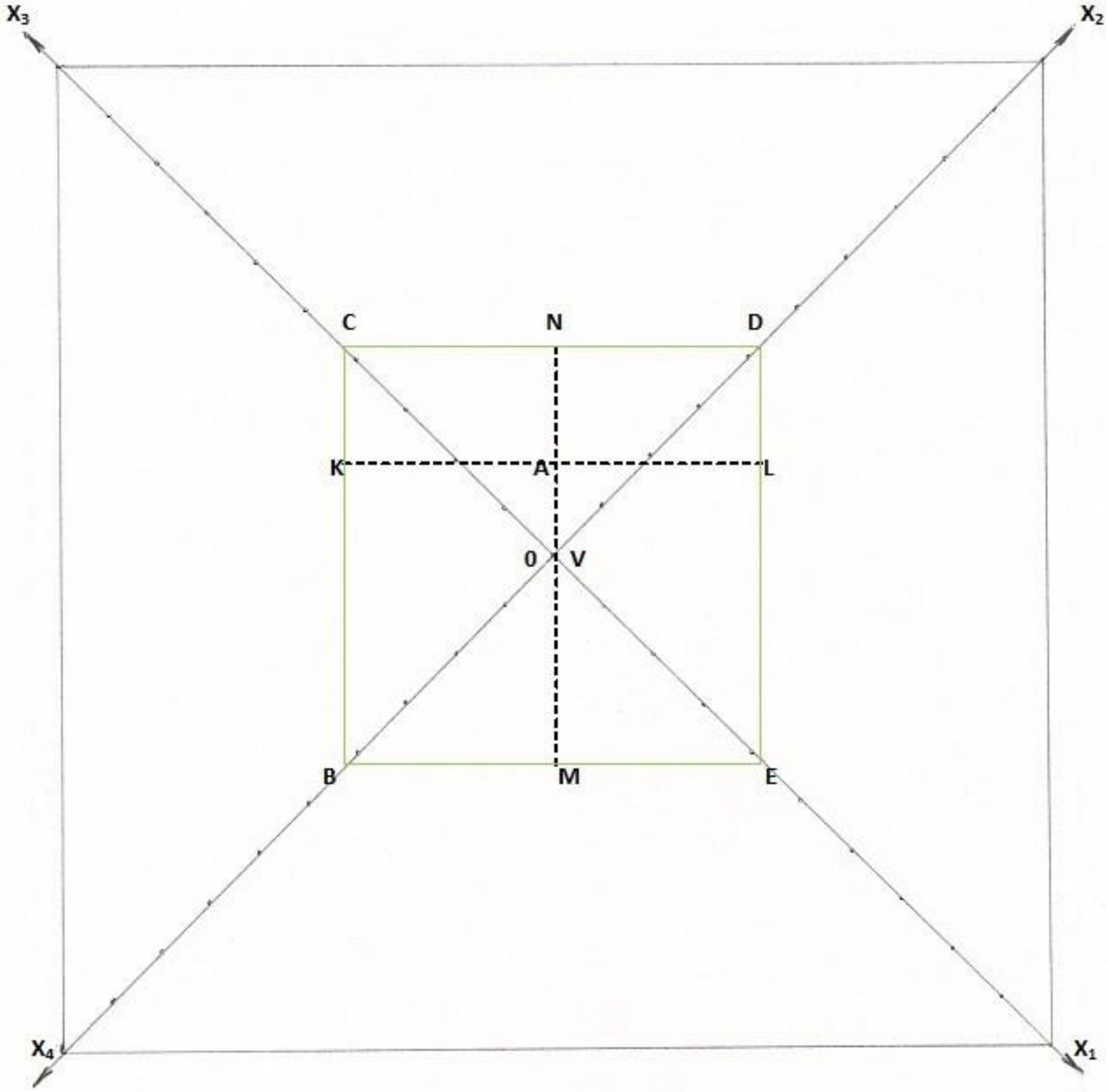

Рис.14

Планиметрический рисунок, показывающий пересечение линий взаимодействия первой и второй пар уравнений.

4. Определяем координаты (величины неизвестных) точки ***A***,

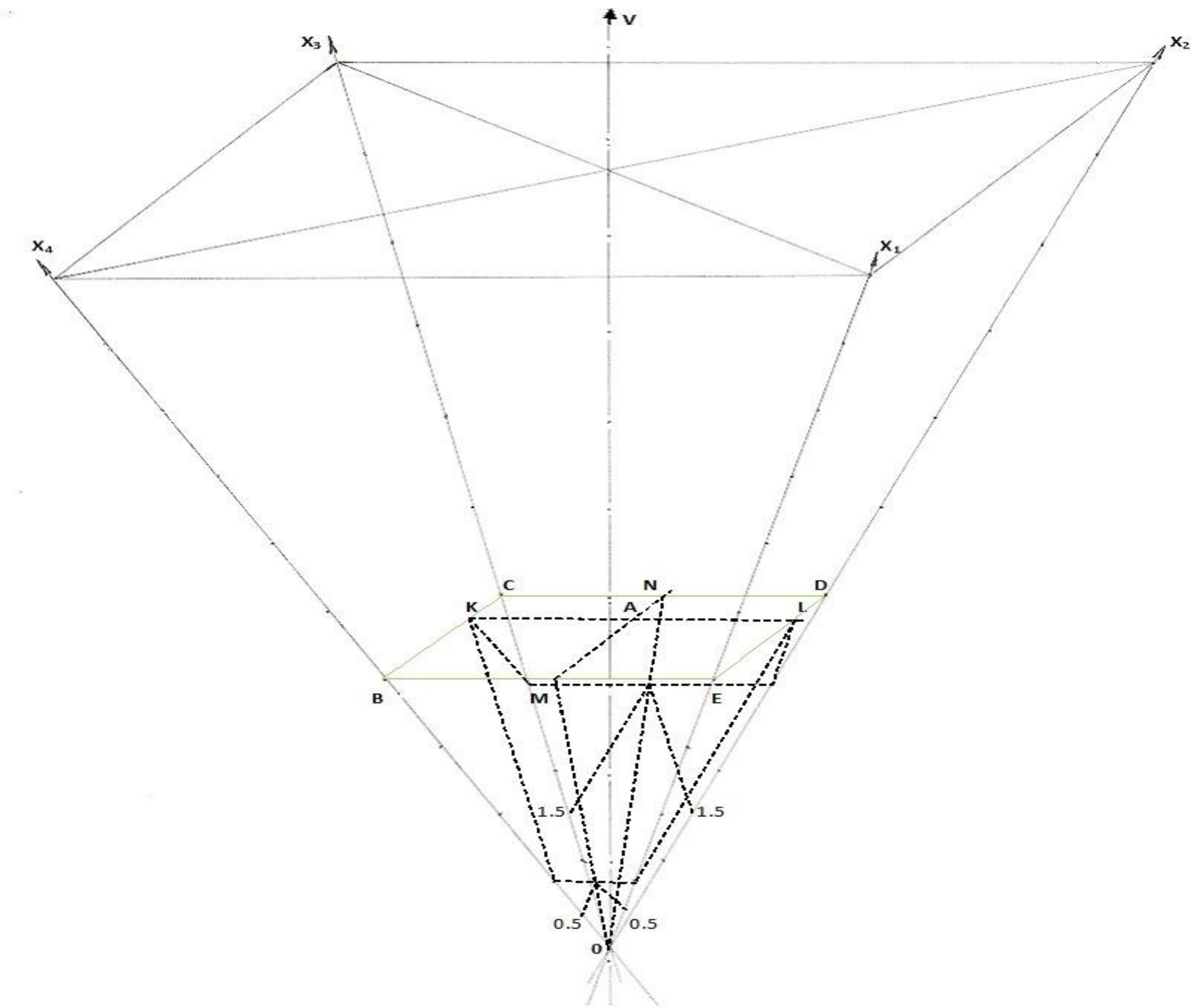

Рис.15

Аксонометрический рисунок, показывающий определение координат точки решения ***A***

<u>Пояснения к рисункам 15 и 16:</u>

- Прямая ***MN*** является линией пересечения образов первого и второго уравнений,
- Прямая ***KL*** является линией пересечения образов третьего и четвёртого уравнений,
- Цифры около координатных осей – координаты соответствующих точек, участвующих в построении образов уравнений.

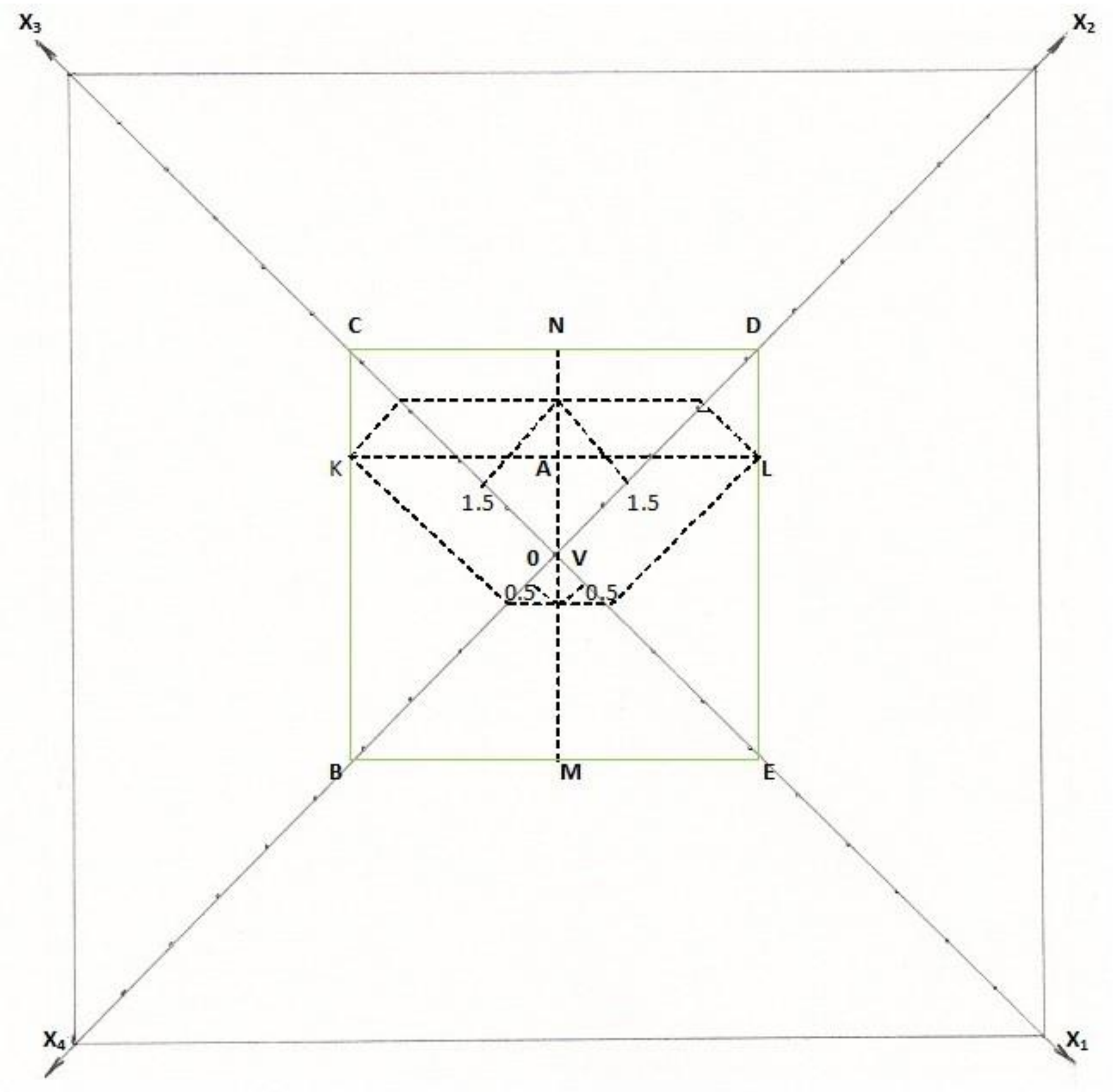

Рис.16

Планиметрический рисунок, показывающий определение координат точки решения ***A***

Рисунки 15 и 16 показывают, что координаты точки решения таковы:

$x_1 = 0.5$; $x_2 = 1.5$; $x_3 = 1.5$; $x_4 = 0.5$

Они и могут явиться решением данной системы уравнений. Необходима проверка.

5. Проверяем правильность решения.

Подставим в каждое уравнение системы значения найденных координат:

$$\begin{cases} 6 \cdot 0.5 & + & 6 \cdot 1.5 & + & 3 \cdot 1.5 & + & 3 \cdot 0.5 & = & 18 \\ 3 \cdot 0.5 & + & 3 \cdot 1.5 & + & 6 \cdot 1.5 & + & 6 \cdot 0.5 & = & 18 \\ 6 \cdot 0.5 & + & 2 \cdot 1.5 & + & 2 \cdot 1.5 & + & 6 \cdot 0.5 & = & 12 \\ 3.8 \cdot 0.5 & + & 6.1 \cdot 1.5 & + & 6.1 \cdot 1.5 & + & 3.8 \cdot 0.5 & = & 22.1 \end{cases}$$

Равенства не нарушены. Значит, координаты точки ***A*** являются найденными величинами неизвестных, удовлетворяющими каждому уравнению системы, т. е.

$$\boldsymbol{x_1} = 0.5; \quad \boldsymbol{x_2} = 1.5; \quad \boldsymbol{x_3} = 1.5; \quad \boldsymbol{x_4} = 0.5$$

Пример 2 считается решённым.

Пример 3.

Решить графическим методом систему из четырёх линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными в пространстве 4-мерной произвольно-угольной системы координат (рисунки с 17 по 34).

$$\begin{cases} 5x_1 & + & 9x_2 & + & 5x_3 & + & 9x_4 & = & 45 \\ 11x_1 & + & ax_2 & + & 11x_3 & + & ax_4 & = & 55 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 6.42857142 \\ bx_1 & + & 8x_2 & + & bx_3 & + & 8x_4 & = & 42.24 \end{cases}$$

где: $a = 55/9$ и $b = 5.1413334$ – соответствующие коэффициенты.

Решение примера 3

Стратегия решения: (все рисунки представляются в аксонометрии и планиметрии)

1. Представляем образ 1 уравнения
2. Представляем образ 2 уравнения
3. Представляем образ ломаной плоскости пересечения 1 и 2 уравнений
4. Определяем координаты характерных точек образа ломаной плоскости пересечения 1 и 2 уравнений
5. Представляем образ 3 уравнения
6. Представляем образ 4 уравнения
7.Представляем образ общей точки пересечения 3 и 4 уравнений
8. Определяем координаты общей точки пересечения 3 и 4 уравнений
9. Определяем координаты точку (точку решения – $\boldsymbol{A}$) пересечения образа ломаной плоскости и общей точки пересечении 3 и 4 уравнений
10. Проверяем правильность решения примера 3

1. Представляем образ 1 уравнения (рисунки 17 и 18).

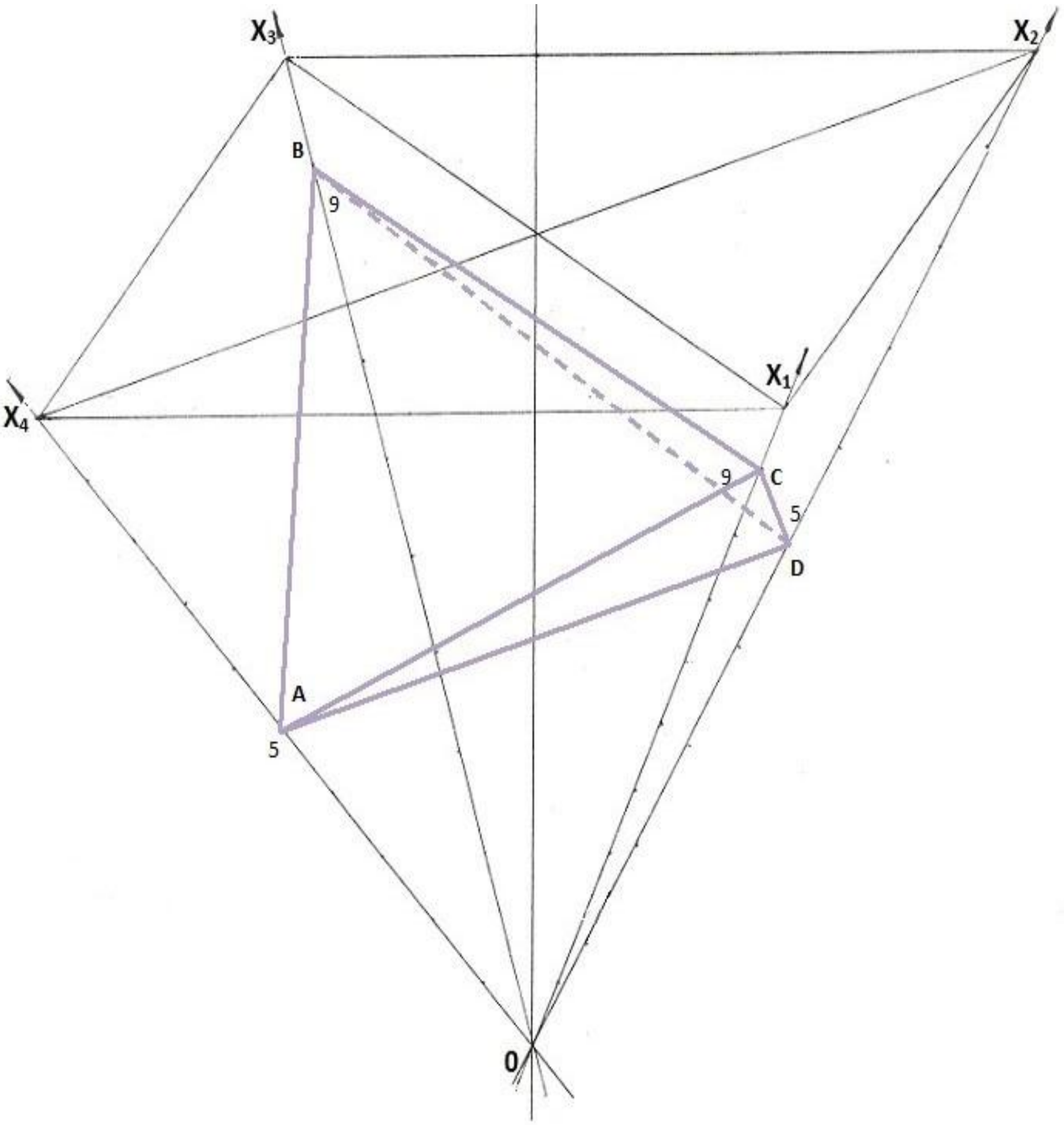

Рис.17

Аксонометрический рисунок, показывающий
образ первого уравнения (сиреневый контур)

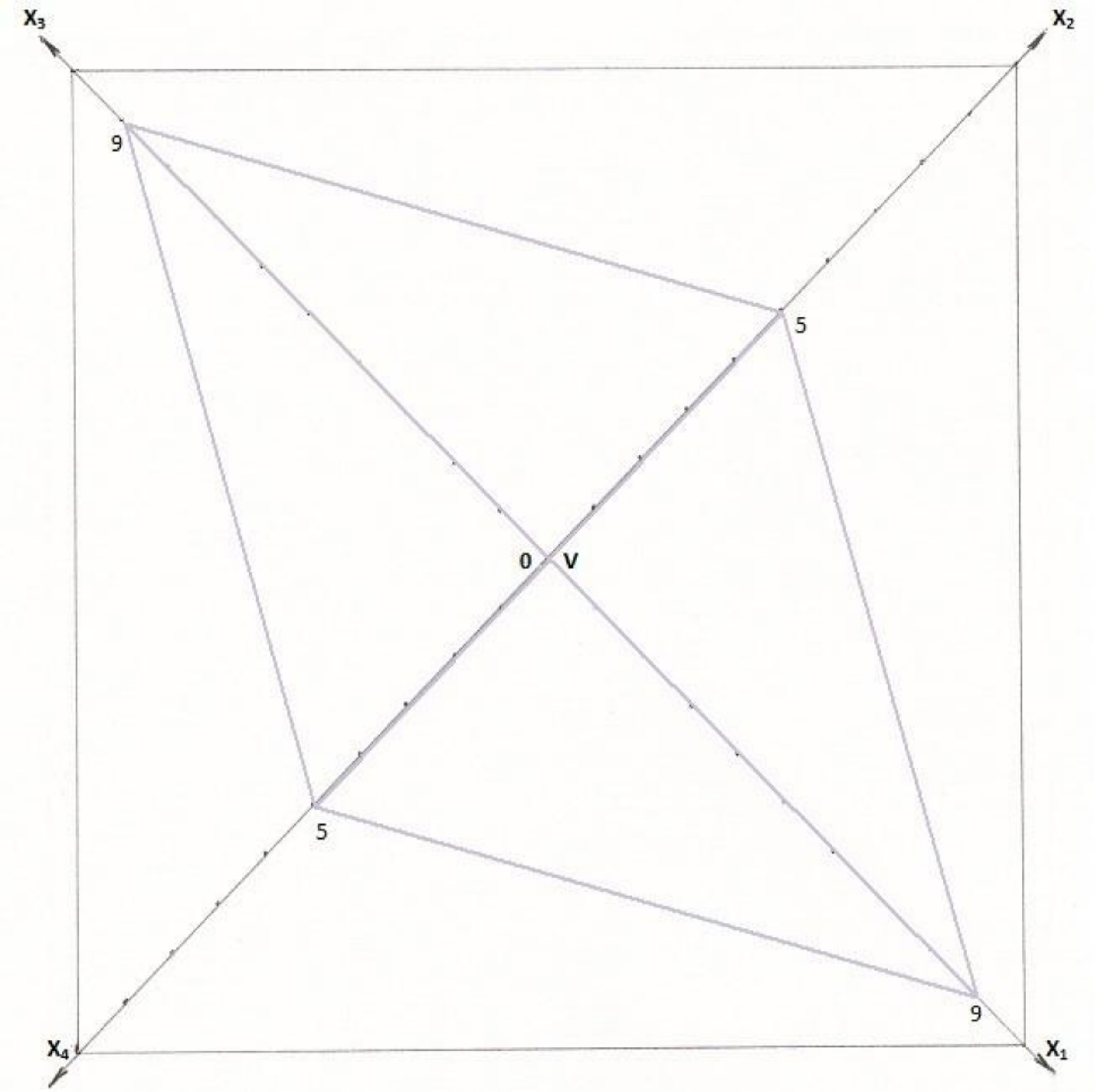

Рис.18

Планиметрический рисунок, показывающий образ первого уравнения (сиреневый контур)

2. Представляем образ 2 уравнения (рисунки 19 и 20).

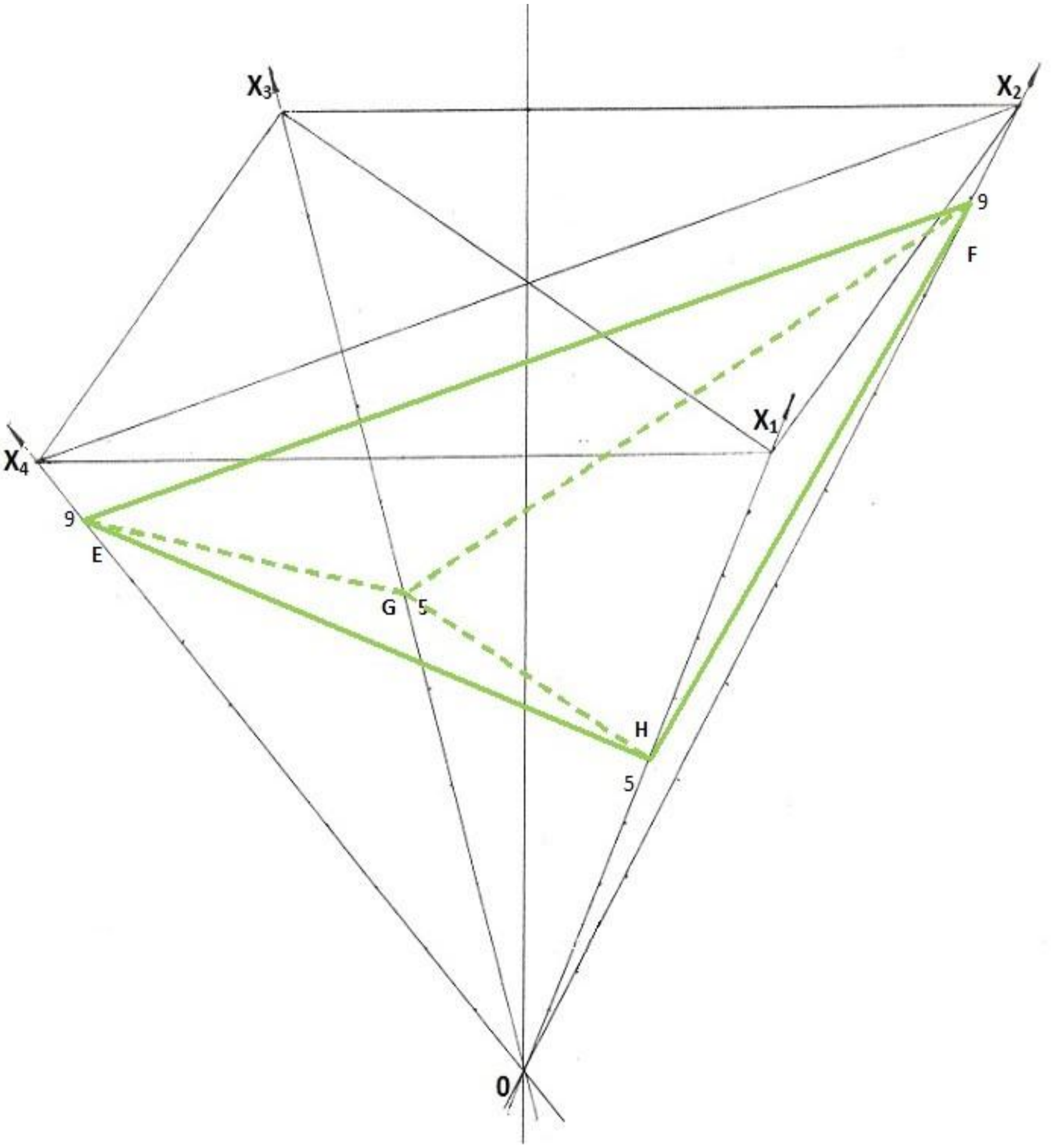

Рис.19

Аксонометрический рисунок, показывающий образ второго уравнения (зелёный контур)

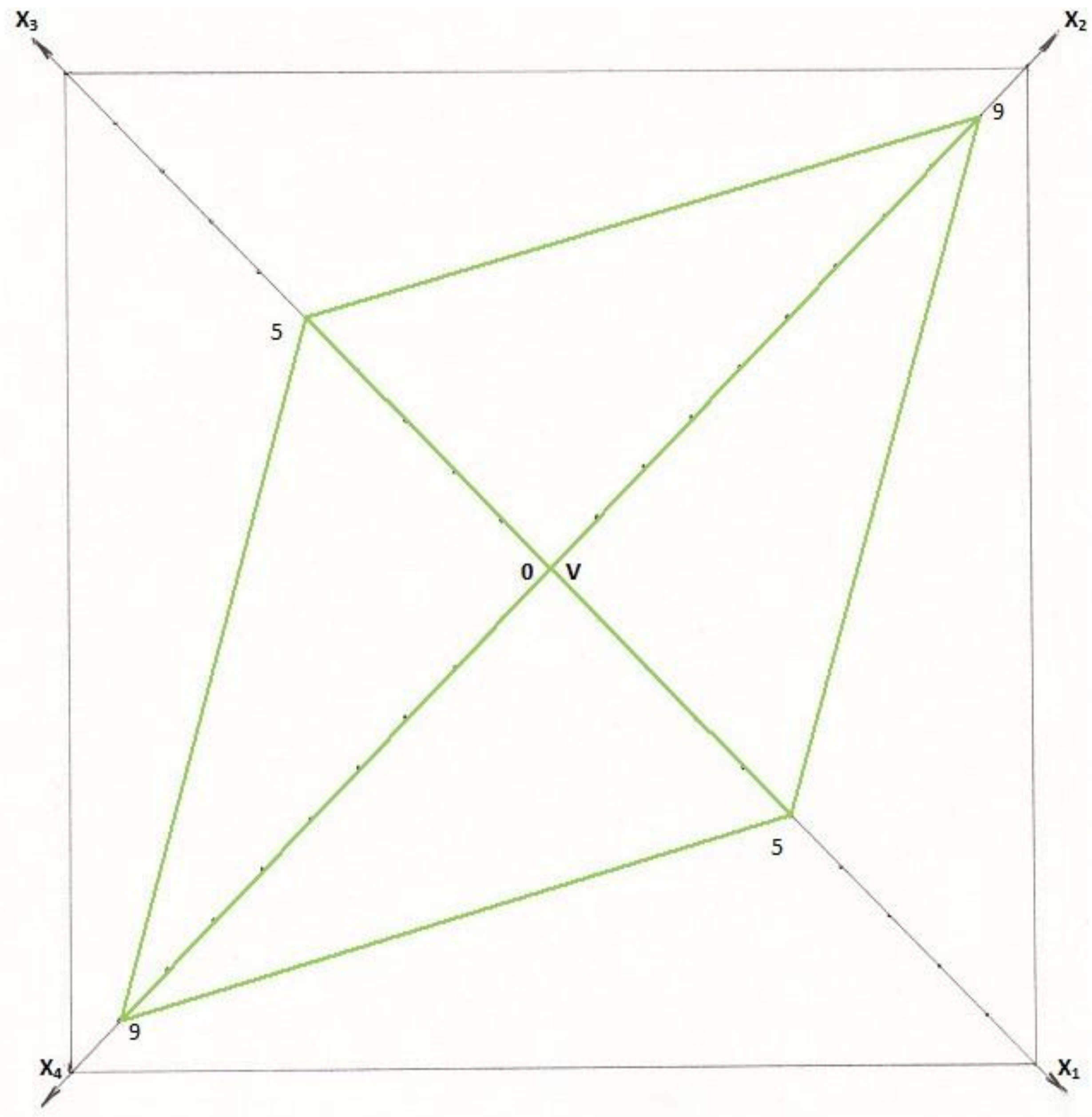

Рис.20

Планиметрический рисунок, показывающий
образ второго уравнения (зелёный контур)

3. Представляем образ ломаной плоскости, образованной пересечением образов 1 и 2 уравнений (рисунки 21 и 22).

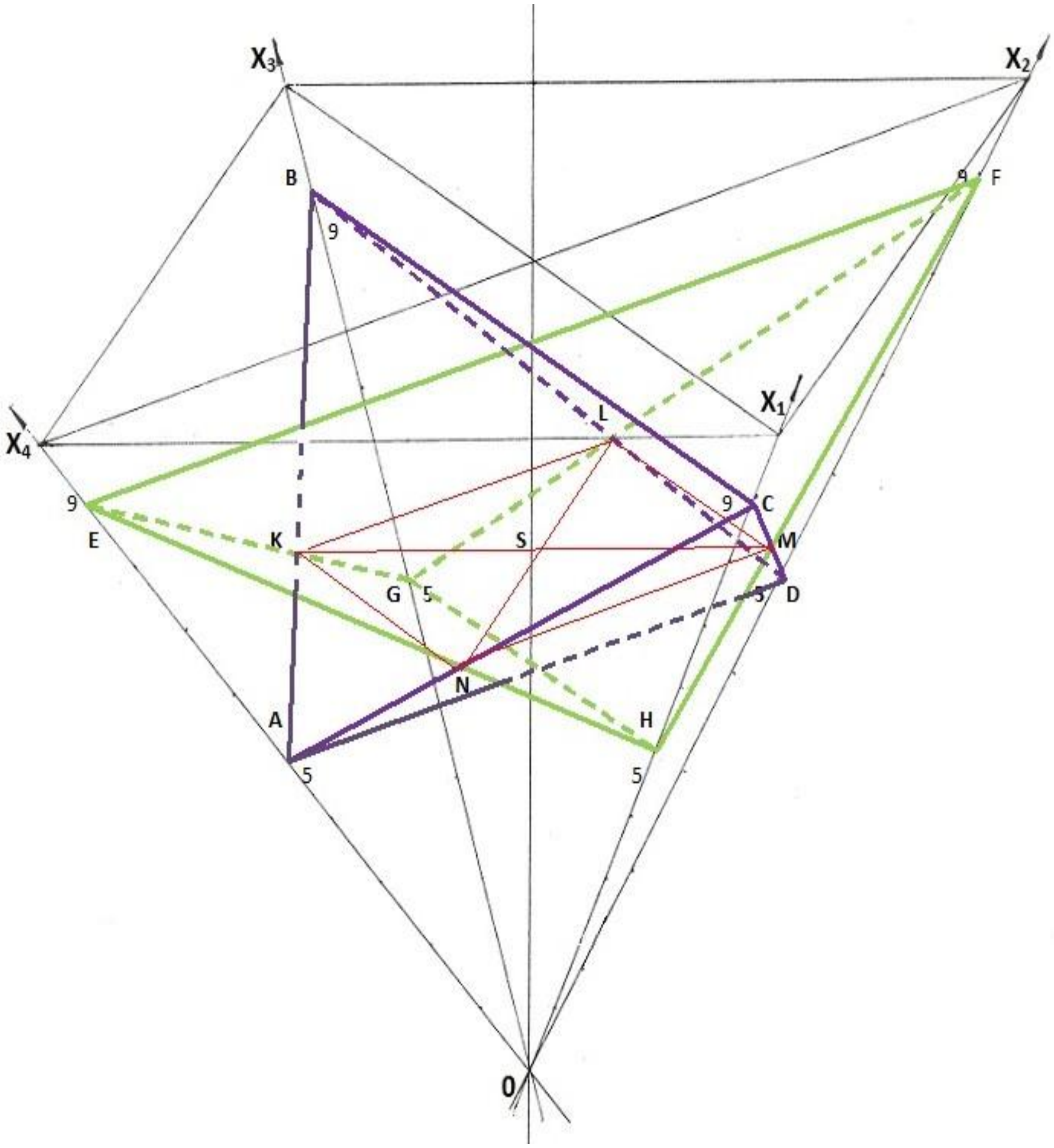

Рис.21

Аксонометрический рисунок, показывающий пересечение образов первого (сиреневый контур) и второго уравнения (зелёный контур) в виде плоскости ***KLMN*** (красный контур)

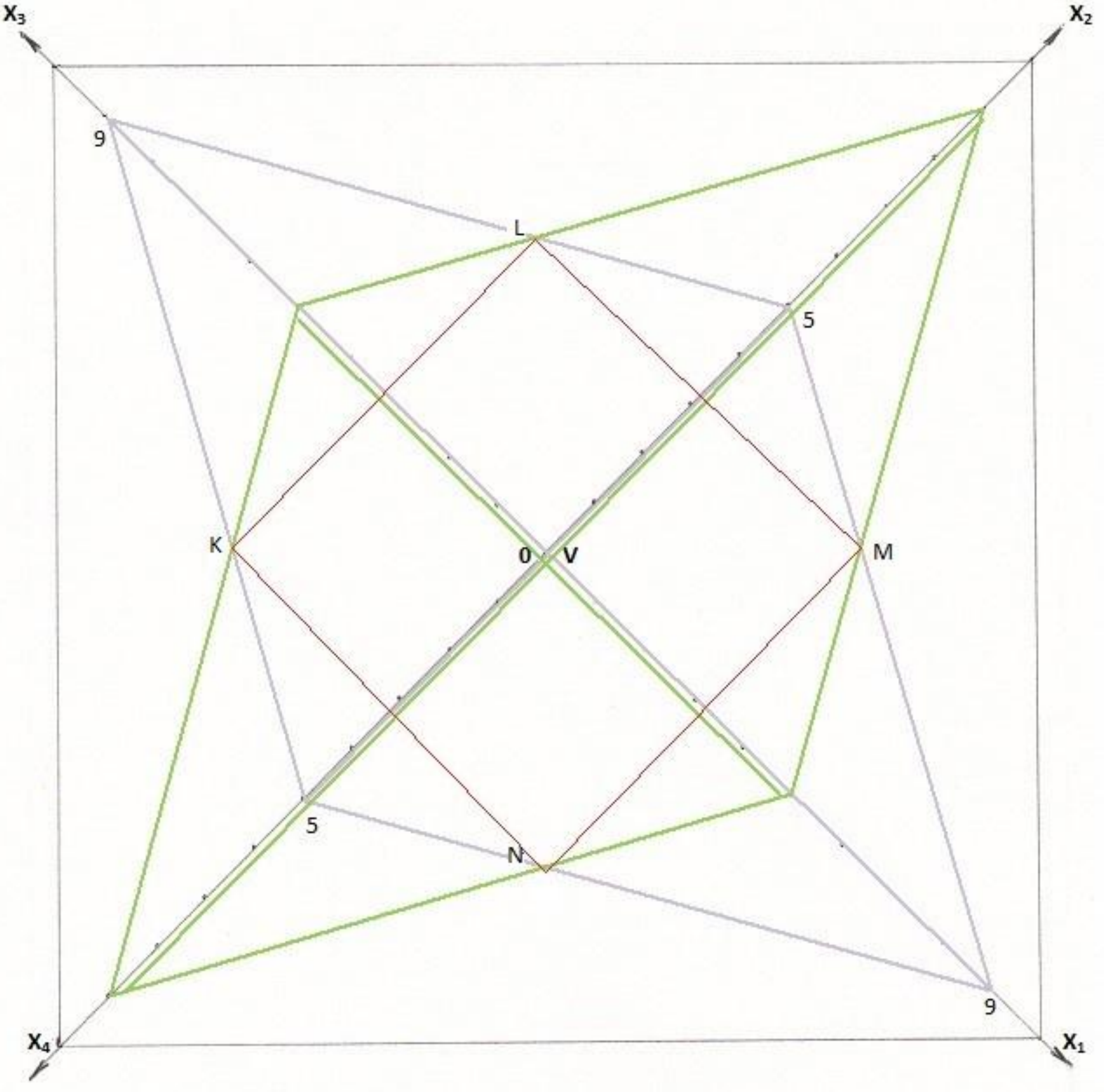

Рис.22

Планиметрический рисунок, показывающий пересечение образов первого (сиреневый контур) и второго уравнения (зелёный контур) в виде плоскости ***KLMN*** (красный контур)

4. Определяем координаты характерной точки ***K*** образа ломаной плоскости пересечения образов 1 и 2 уравнений (рисунки 23 и 24).

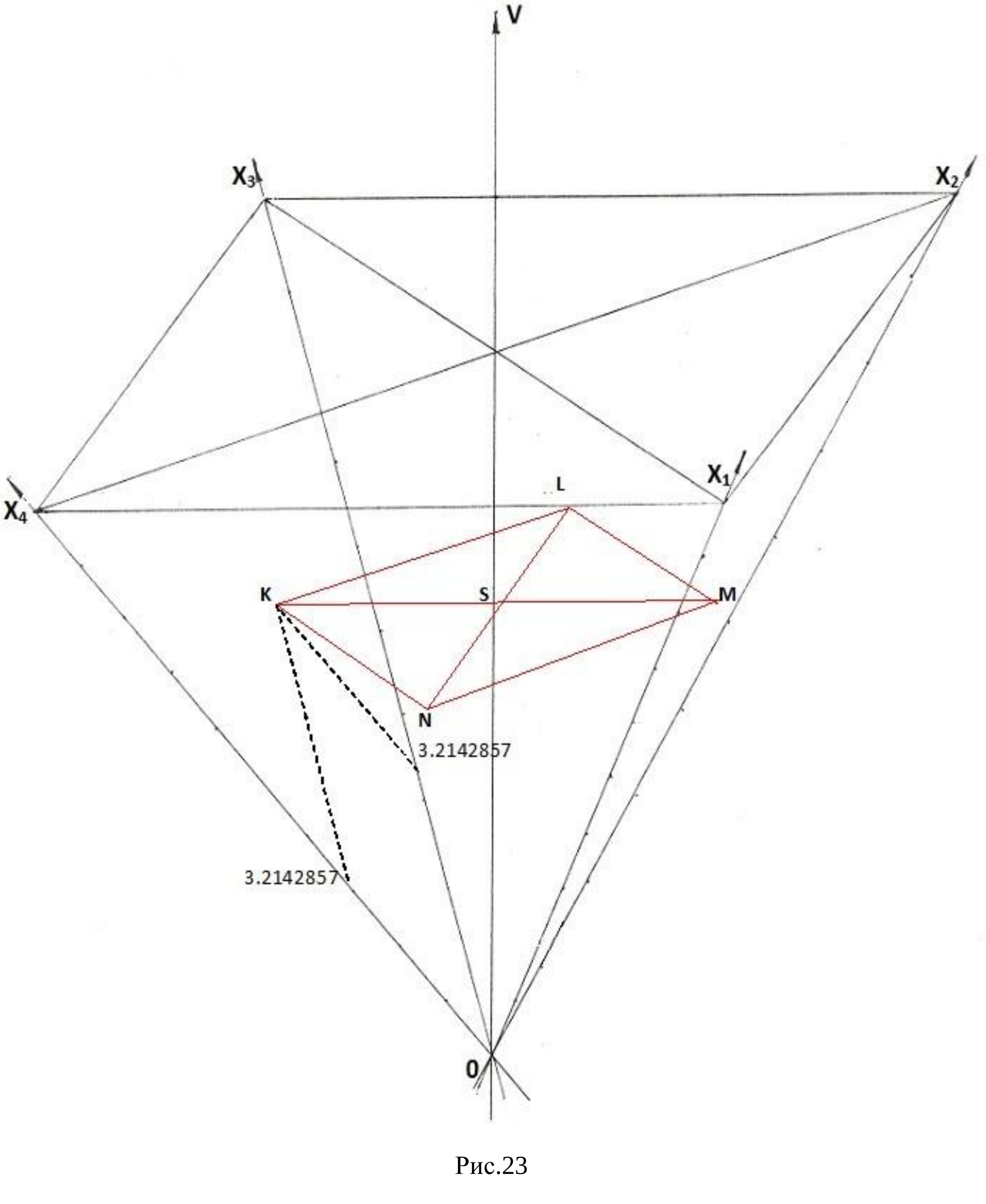

Рис.23

Аксонометрический рисунок, показывающий координаты характерной точки ***K***

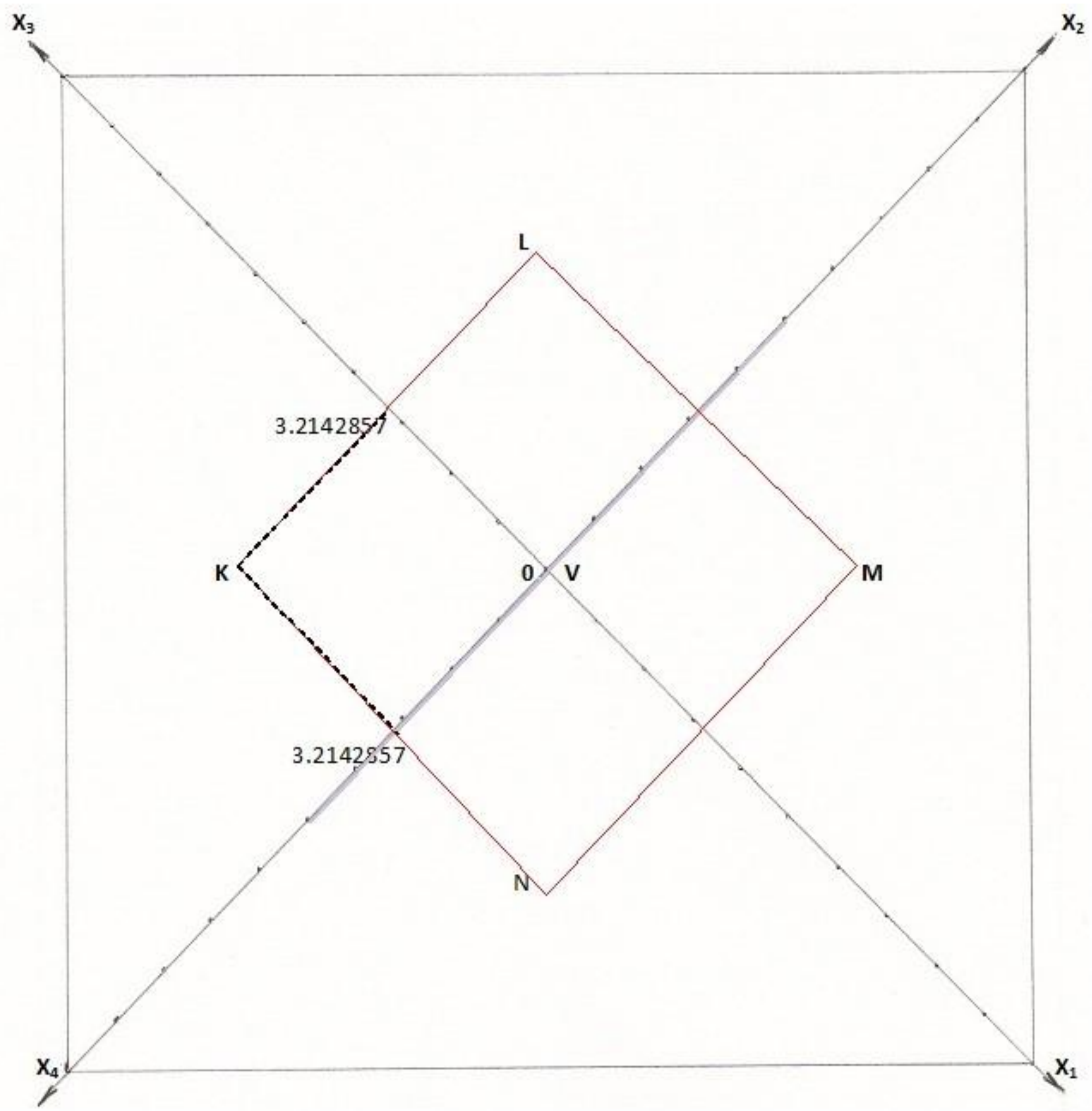

Рис.24

Планиметрический рисунок, показывающий
координаты характерной точки ***K***

5. Показан (с двух ракурсов) макет пространственной фигуры, получившейся в результате взаимодействия первого и второго уравнений. Синий контур окаймляет плоскость их пересечения - ***KLMN*** (рисунки 25 и 26).

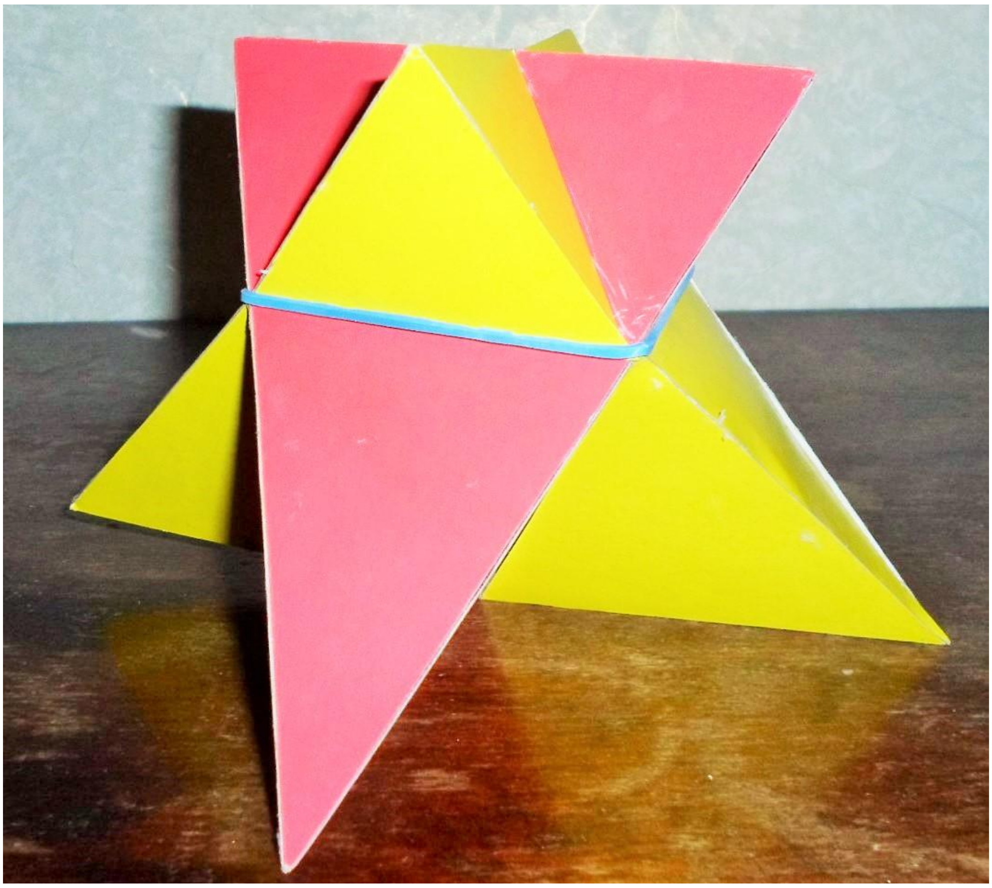

Рис.25

Рис.26

6. Представляем образ 3 уравнения (рисунки 27 и 28).

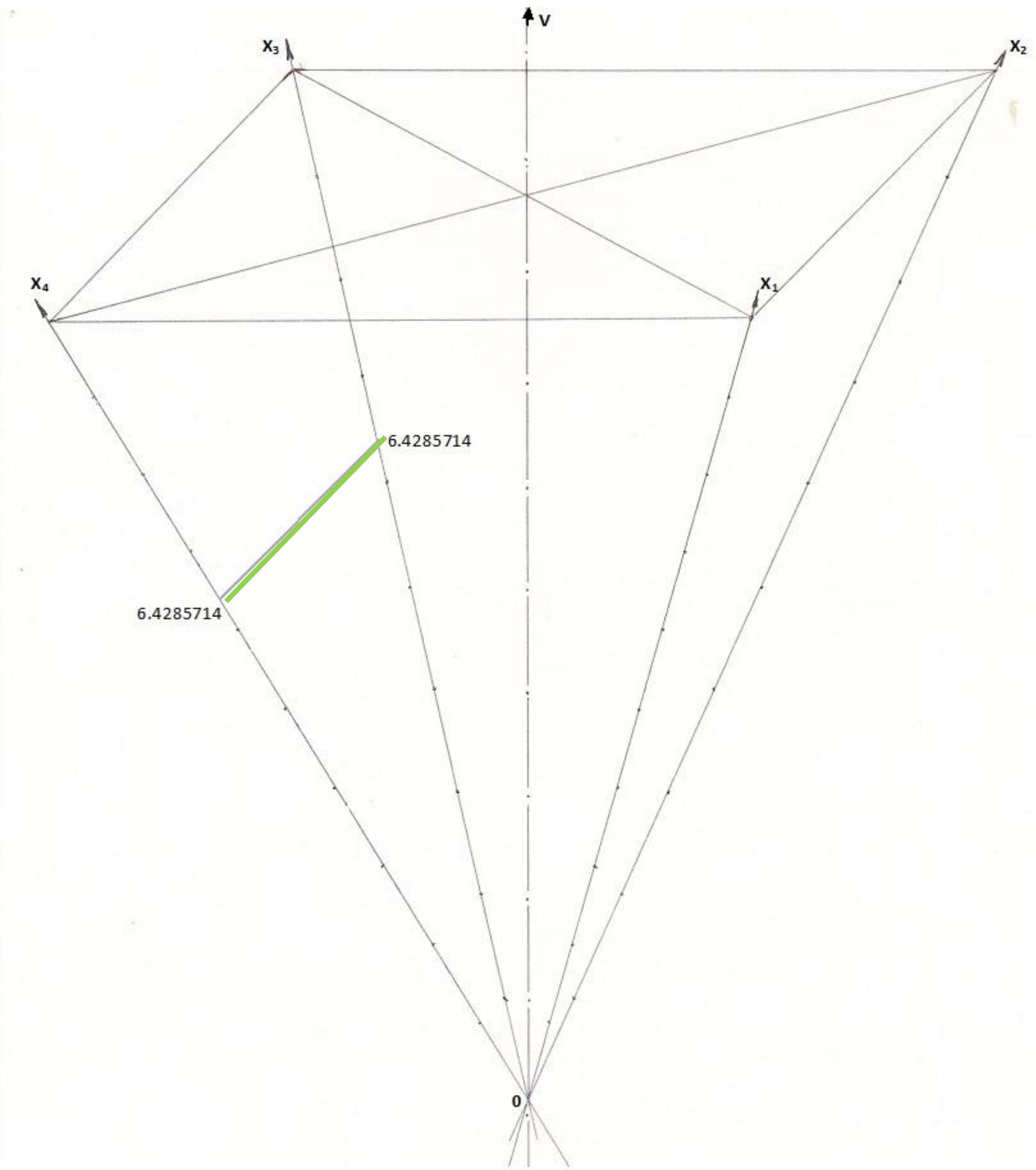

Рис.27

Аксонометрический рисунок, показывающий
образ третьего уравнения (зелёная прямая)

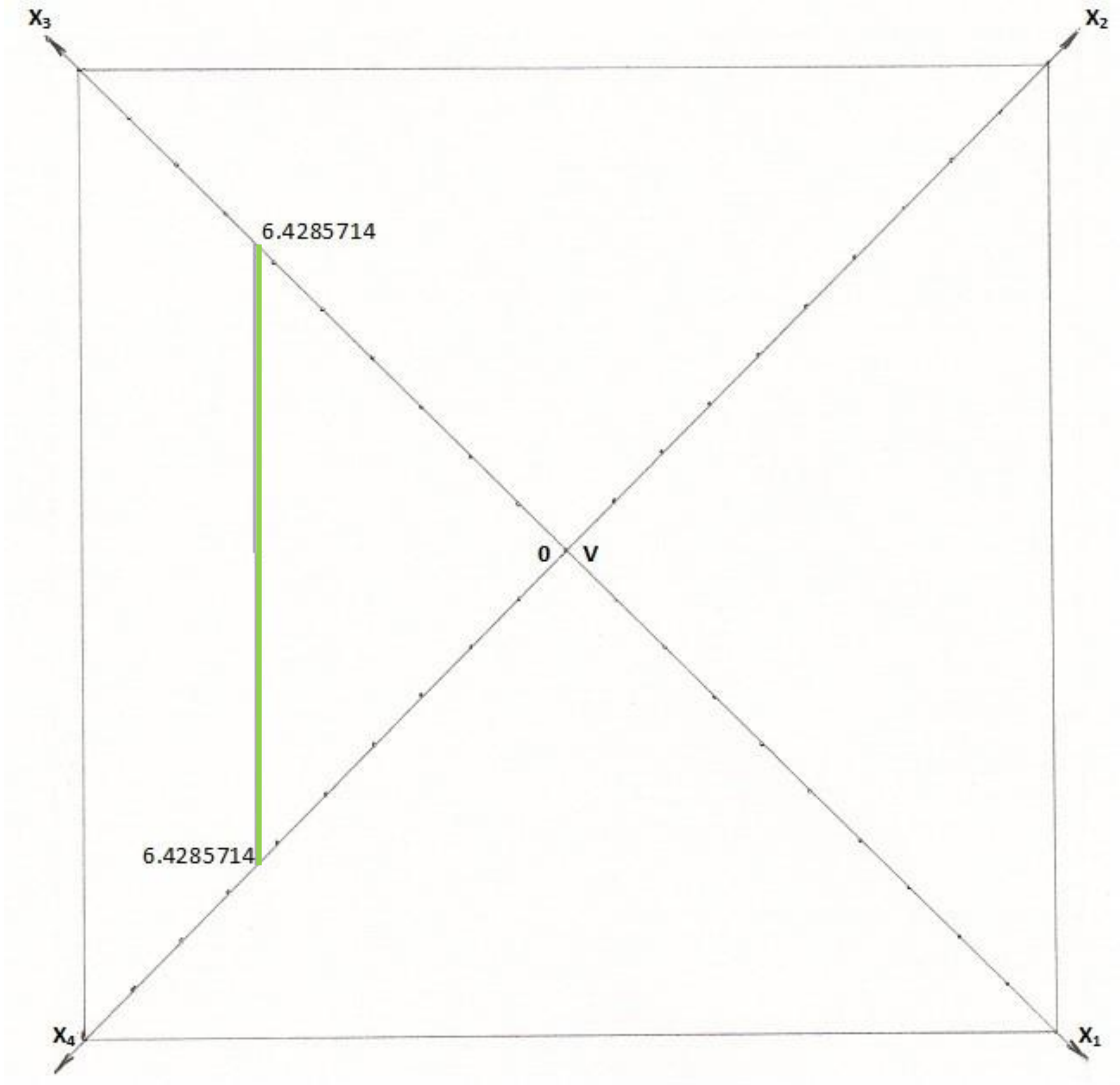

Рис.28

Планиметрический рисунок, показывающий
образ третьего уравнения (зелёная прямая)

7. Представляем образ 4 уравнения (рисунки 29 и 30).

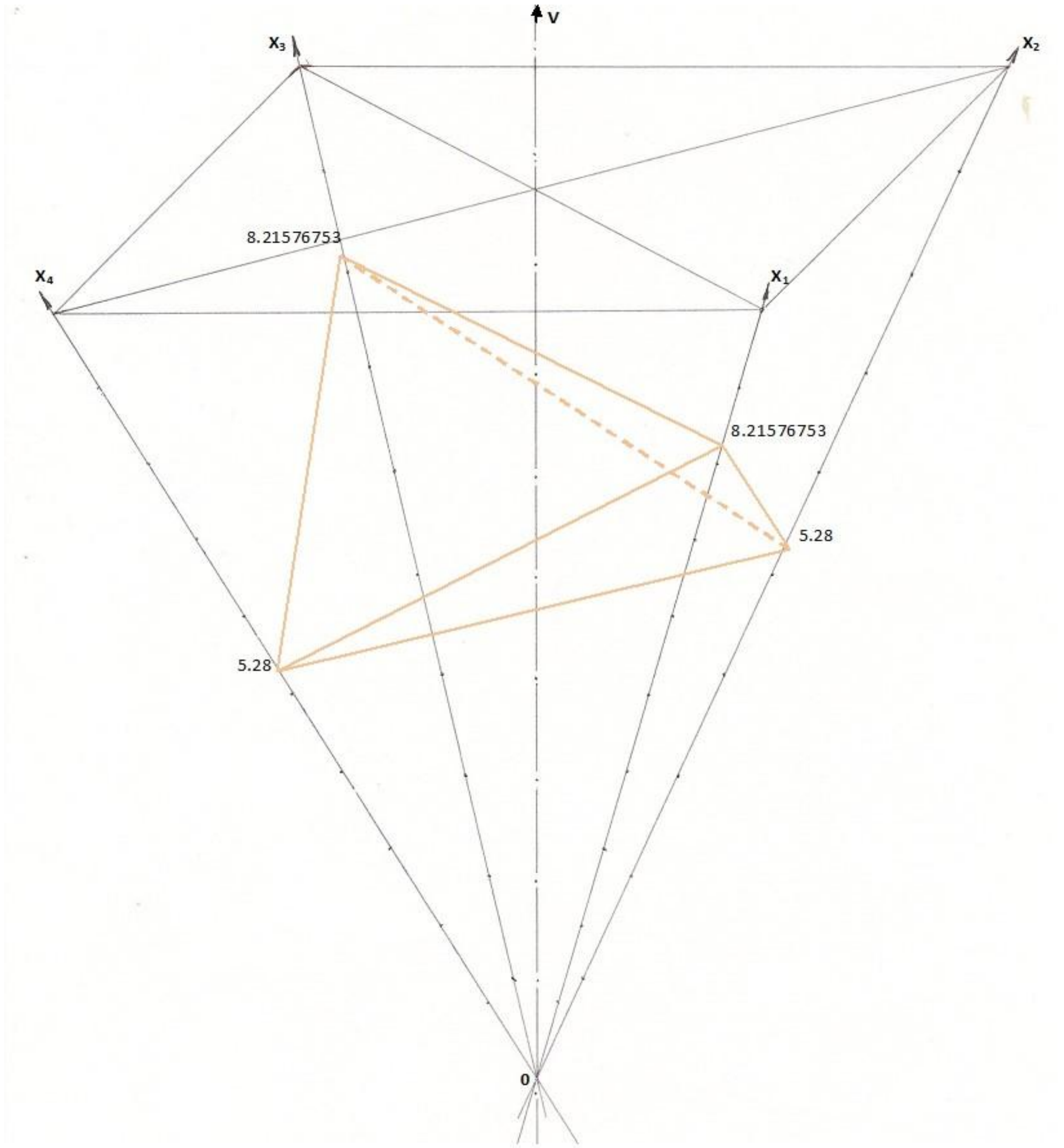

Рис.29

Аксонометрический рисунок, показывающий
образ четвёртого уравнения (оранжевый контур)

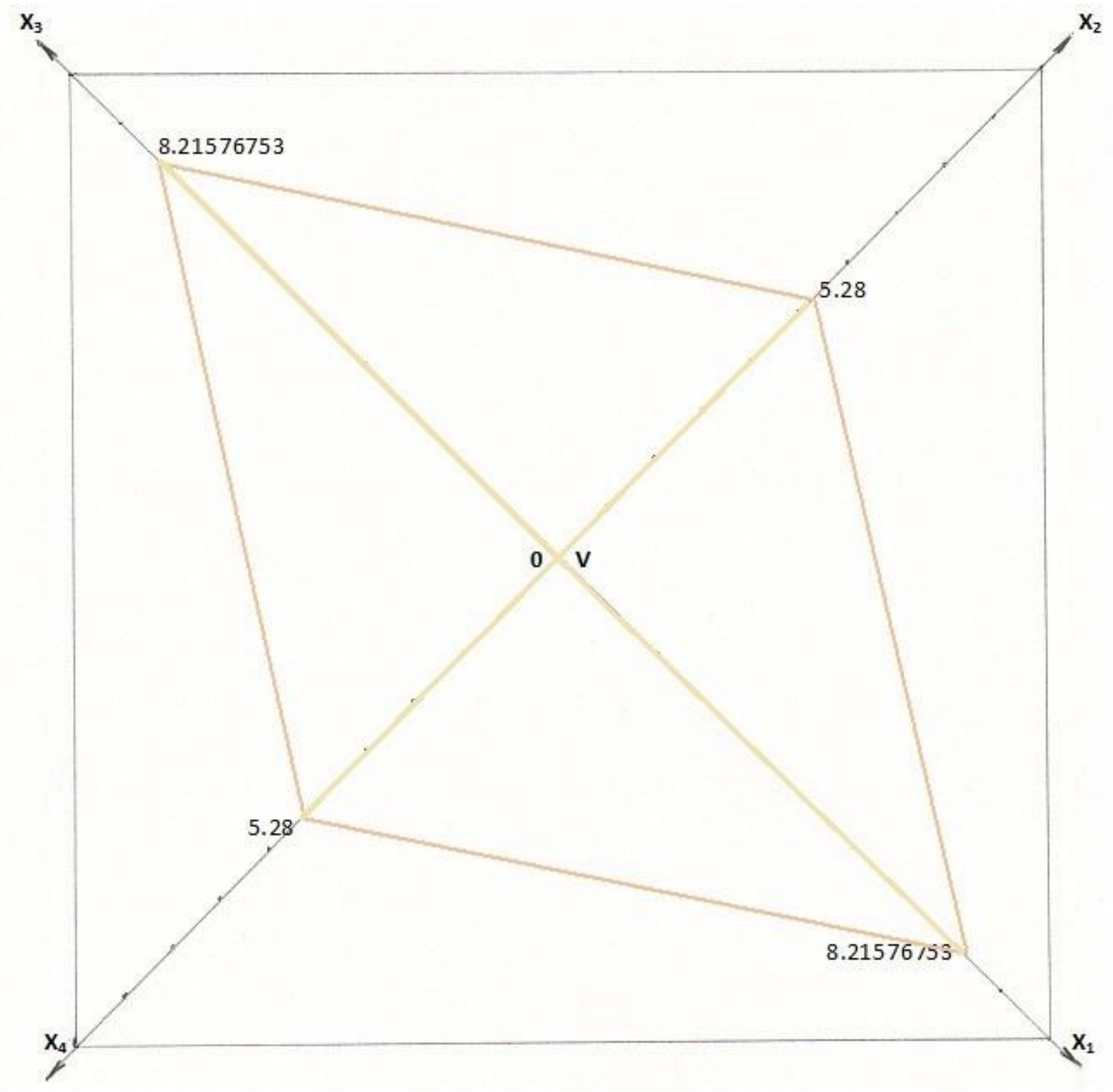

Рис.30

Планиметрический рисунок, показывающий
образ четвёртого уравнения (оранжевый контур)

8. Представляем образ общей точки (т. $\boldsymbol{A}$) пересечения 3 и 4 уравнений (рисунки 31 и 32).

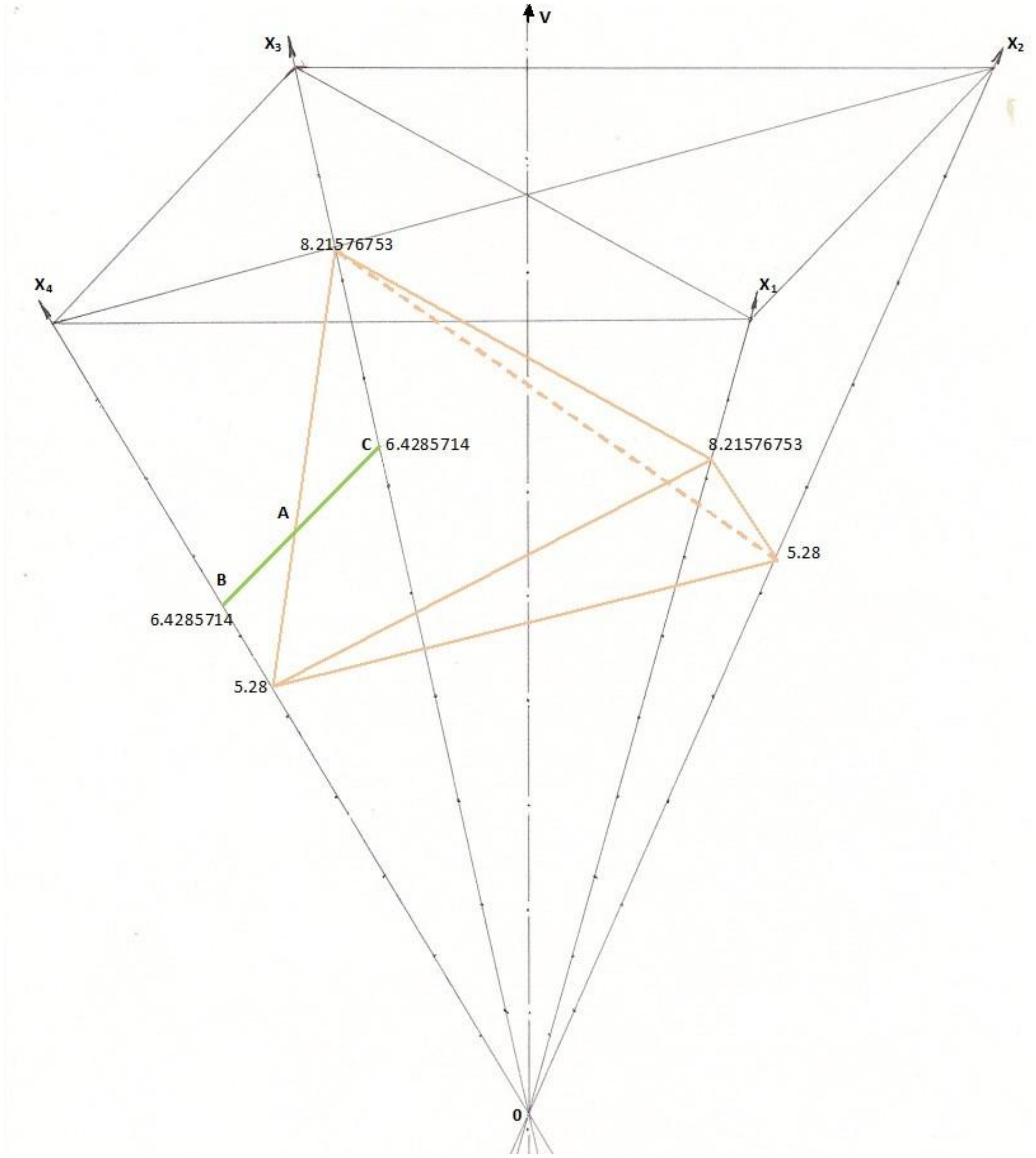

Рис.31

Аксонометрический рисунок, показывающий
образ общей точки (т. $\boldsymbol{A}$) пересечения образов 3 и 4 уравнений

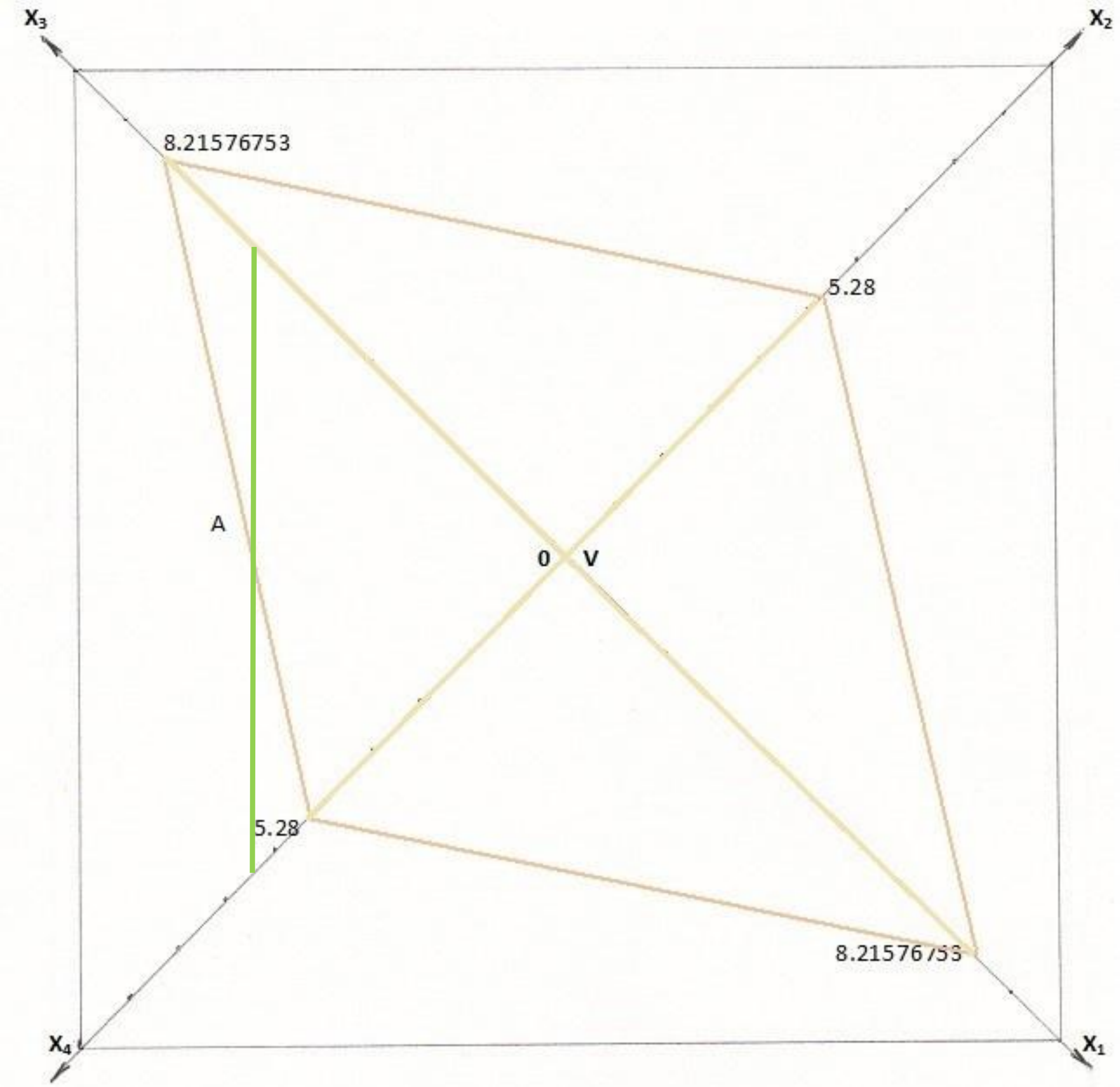

Рис.32

Планиметрический рисунок, показывающий
образ общей точки (т. ***A***) пересечения образов 3 и 4 уравнений

8. Определяем координаты общей точки (т. А) пересечения образов 3 и 4 уравнений (рисунки 33 и 34)

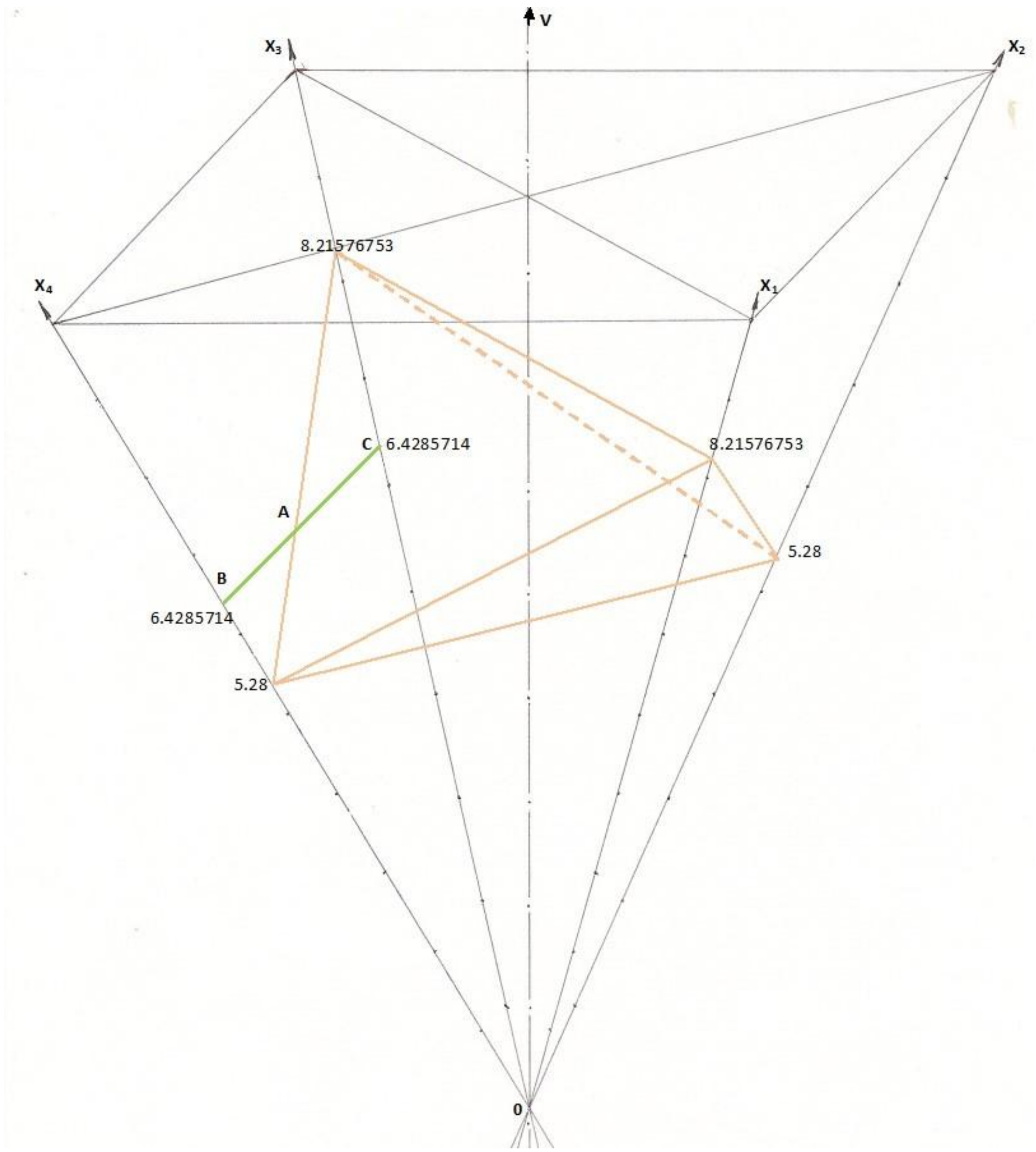

Рис.33

Аксонометрический рисунок, показывающий координаты общей точки (т. ***A***) - точки пересечения образов 3 и 4 уравнений

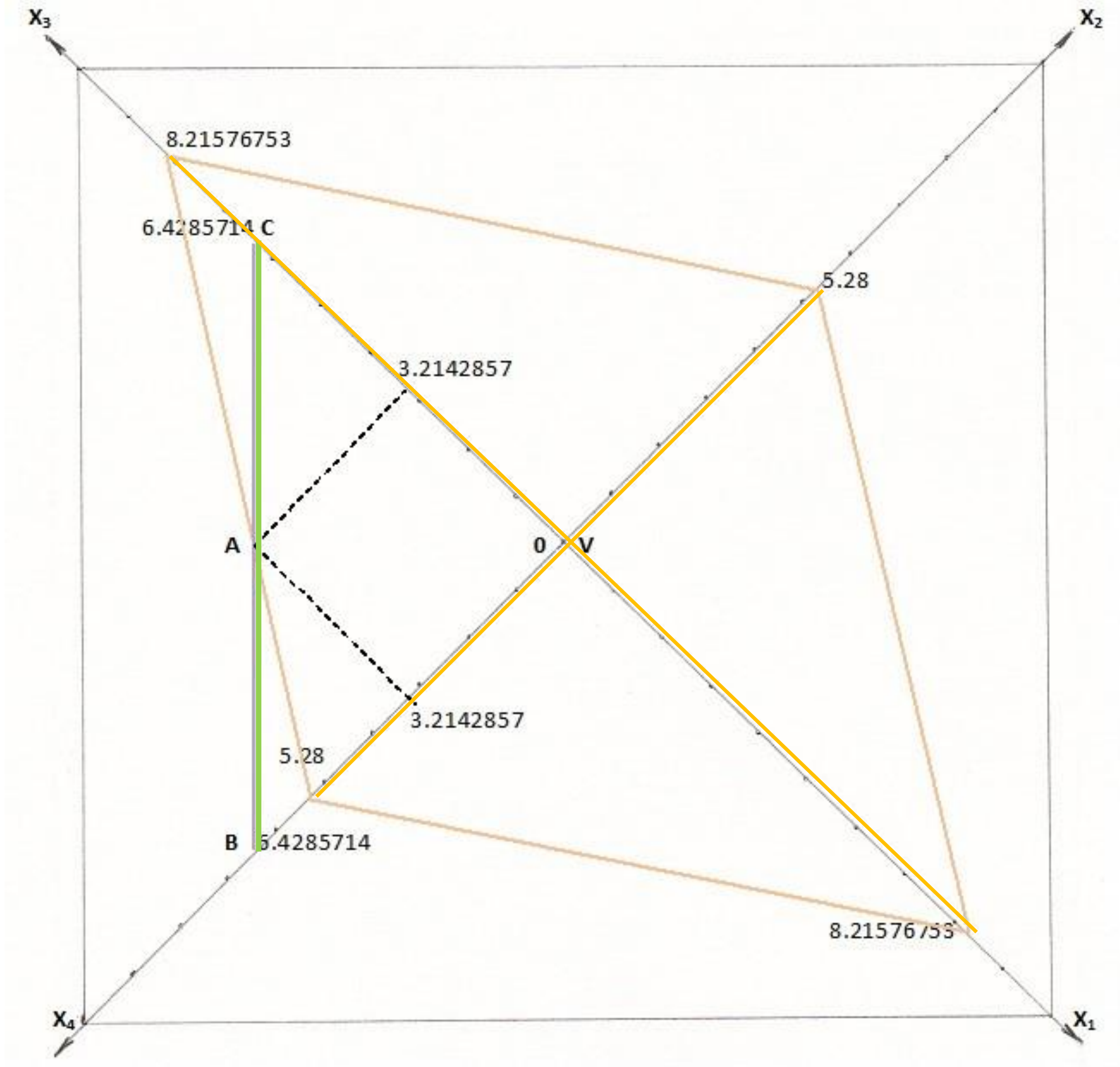

Рис.34

Планиметрический рисунок, показывающий координаты общей точки (т. $\boldsymbol{A}$) - точки пересечения образов 3 и 4 уравнений

9. Определяем координаты точки (точки решения – ***A***), общей для образа ломаной плоскости ***KLMN*** и общей точки пересечении 3 и 4 уравнений.

Из рисунков 33 и 34 видно, что одна и та же точка (т. ***A***) по своим координатам (0; 0; 3.2142857; 3.2142857) принадлежит одновременно плоскости ***KLMN*** (рис.21, т. ***K***) и пересечению образов 3 и 4 уравнений (рис.34). Значит она принадлежит и всем уравнениям, т. е. она является решением системы уравнений с параметрами

$$\boldsymbol{x_1} = 0; \quad \boldsymbol{x_2} = 0; \quad \boldsymbol{x_3} = 3.2142857; \quad \boldsymbol{x_4} = 3.2142857$$

10. Проверяем правильность решения примера 3

$$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 45 \\ 11x_1 + ax_2 + 11x_3 + ax_4 = 55 \\ x_3 + x_4 = 6.42857142 \\ bx_1 + 8x_2 + bx_3 + 8x_4 = 42.24 \end{cases}$$

где: $a = 55/9$ и $b = 5.1413334$ – соответствующие коэффициенты.

Подставим значения координат точки ***A*** в каждое из уравнений.

$$\begin{cases} 5 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 5 \cdot 3.2142857 + 9 \cdot 3.2142857 = 45 \\ 11 \cdot 0 + a \cdot 0 + 11 \cdot 3.2142857 + a \cdot 3.2142857 = 55 \\ 3.2142857 + 3.2142857 = 6.42857142 \\ b \cdot 0 + 8 \cdot 0 + b \cdot 3.2142857 + 8 \cdot 3.2142857 = 42.24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 + 0 + 16.0714285 + 28.9285713 = 45 \\ 0 + 0 + 35.3571427 + 19.6428571 = 55 \\ 3.2142857 + 3.2142857 = 6.42857142 \\ 0 + 0 + 16.5257144 + 25.7142856 = 42.24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 44.9999998 = 45 \\ 54.9999998 = 55 \\ 6.42857144 = 6.42857142 \\ 42.24 = 42.24 \end{cases}$$

Опуская неточности в седьмом знаке после запятой (неизбежно связанные с начертанием рисунков), можно утверждать, что равенства сохраняются. Значит, координаты точки $\boldsymbol{A}(0;\ 0;\ 3.2142857;\ 3.2142857)$ являются правильным решением системы уравнений.

Поэтому пример 3 считается решённым.

Таким образом, решены все три примера. Они по своим условиям оказались достаточно характерными и достаточно сложными. Хотя, конечно, могут быть системы уравнений и более высокого ранга, но графический подход к ним при их решении в реальной многомерной произвольно-угольной системе координат показан достаточным.

Конец статьи