Многомерная система координат

Содержание

Вступление

Человечество свыклось с Декартовой прямоугольной трёхмерной системой координат, т.к. она является наиболее простой и поэтому часто используемой системой координат на плоскости и в пространстве.

В данной главе автор сделал попытку:

- развить учение Декарта, разработав теорию реальной многомерной произвольно-угольной системы координат;

- представить разработанную реальную многомерную произвольно-угольную систему координат;

- разработать метод графического решения систем алгебраических линейных уравнений и задач линейного программирования с помощью произвольно-угольной системы координат, в частности и тех, решение которых ныне известными способами невозможно;

- на примерах графического решения систем алгебраических линейных уравнений и задач линейного программирования показать, что с применением произвольно-угольной системы координат оно возможно, а значит и право на своё существование такая система тоже имеет.

Автор провозглашает:

1. Система координат реально может быть многомерной и не строго прямоугольной.

2. С изменением угла расположения координатных плоскостей по отношению к вектору направленности системы (т.е. с изменением начального угла) координаты точки в ней не меняются.

1. Декартова прямоугольная система координат

Наличие этой главы в данной книге продиктовано необходимостью доходчивого показа

- того факта, что разработанная автором реальная многомерная произвольно-угольная система координат является прямым развитием существующей и повсеместно используемой ныне Декартовой прямоугольной системы координат;

- идентичности обеих систем координат в вопросах определения координат точки на плоскости и в пространстве, а также – графического решения систем алгебраических линейных уравнений и задач линейного программирования.

1.1. Построение Декартовой прямоугольной системы координат

Построение Декартовой прямоугольной системы координат на плоскости

Декартова прямоугольная система координат на плоскости образуется двумя взаимно перпендикулярными осями координат OX_1 и OX_2, которые пересекаются в точке ***O***, называемой началом координат (рис.1). На каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях. Единицы измерения обычно одинаковы для всех осей (что не является обязательным). В *правосторонней* системе координат положительное направление осей выбирают так, чтобы при направлении оси OX_2 вверх, ось OX_1 смотрела направо. OX_1 — ось абсцисс, OX_2 — ось ординат. Четыре угла (***I, II, III, IV)***, образованные осями координат OX_1 и OX_2, называются координатными углами или *квадрантами*.

Точка ***B*** - ортогональная проекция точки ***A*** на координатную ось OX_1;

Точка ***C*** - ортогональная проекция точки ***A*** на координатную ось OX_2;

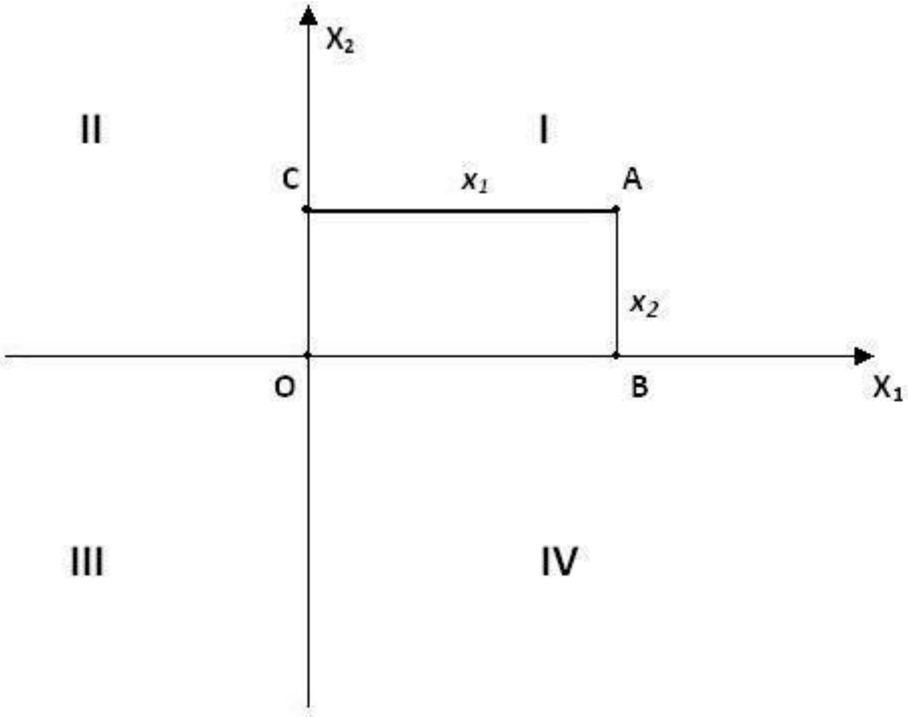

Рис.1

Построение Декартовой прямоугольной системы координат <u>в пространстве</u>

Декартова прямоугольная система координат в пространстве образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат ***OX, OY*** и ***OZ***. Оси координат пересекаются в точке ***O***, которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях. Единицы измерения обычно одинаковы для всех осей (что не является обязательным). ***OX*** — ось абсцисс, ***OY*** — ось ординат, ***OZ*** — ось аппликат.

Если большой палец правой руки принять за направление ***X,*** указательный - за направление ***Y*** а средний - за направление ***Z***, то образуется *правая* система координат. Аналогичными пальцами левой руки образуется *левая* система координат. Иначе говоря, положительное направление осей выбирают так, чтобы при повороте оси ***OX*** против часовой стрелки на 90° её положительное направление совпало с положительным направлением оси ***OY,*** если этот поворот наблюдать со стороны положительного направления оси ***OZ.*** Правую и левую системы координат невозможно совместить так, чтобы совпали соответствующие оси (рис.2). Точка ***F*** - ортогональная проекция точки ***A*** на координатную плоскость ***OXY;*** Точка ***E*** - ортогональная проекция точки ***A*** на координатную плоскость ***OYZ;*** Точка ***G*** - ортогональная проекция точки ***A*** на координатную плоскость ***OXZ;***

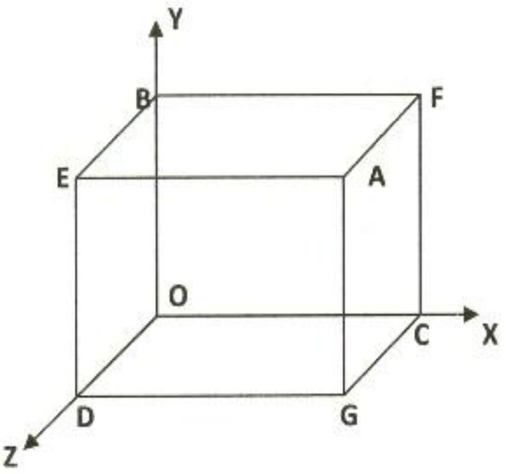

Рис.2

Макеты Декартовой прямоугольной системы координат ***в пространстве*** показаны на рисунках 3, 4, 5 и 6.

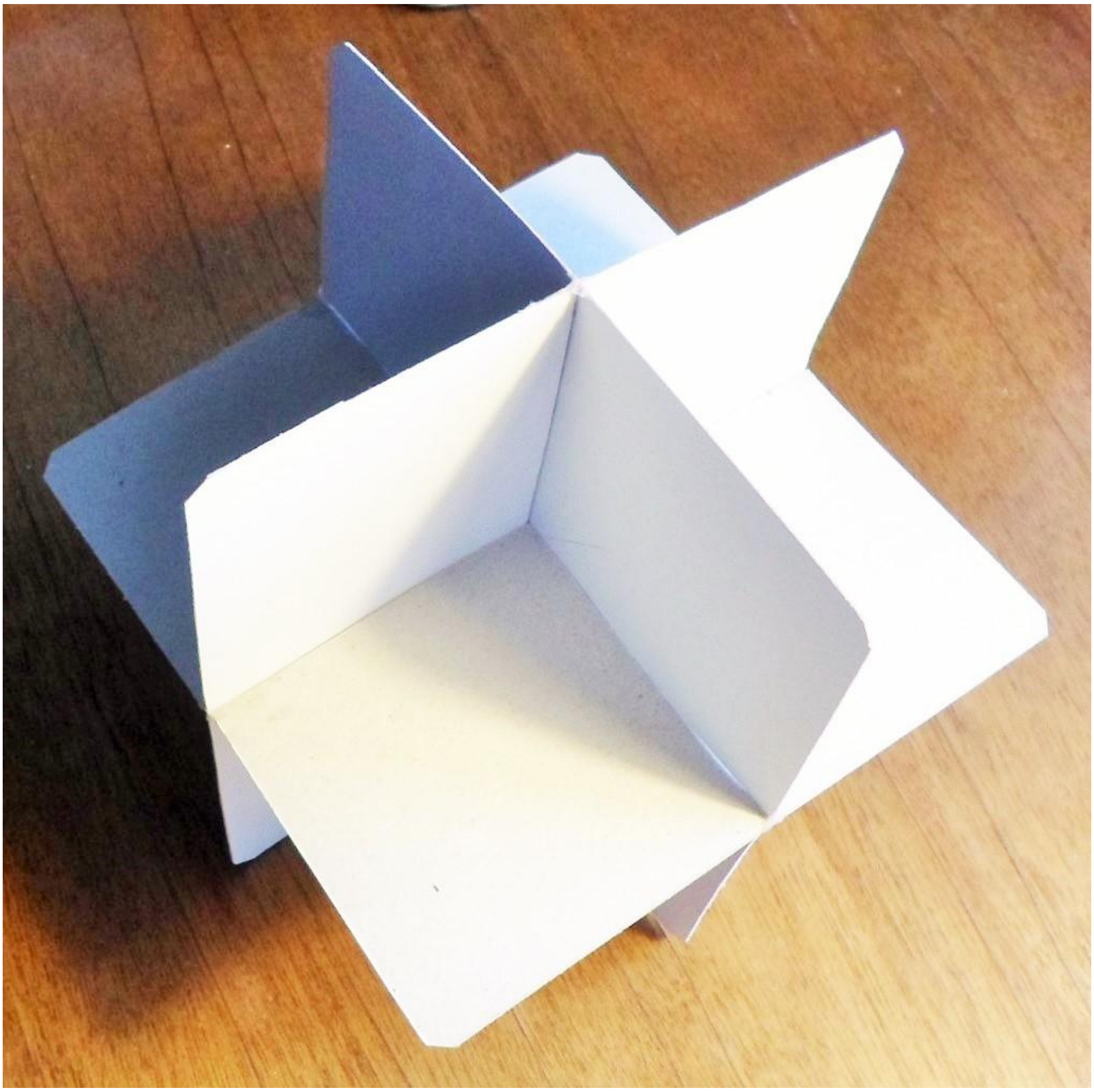

Рис.3

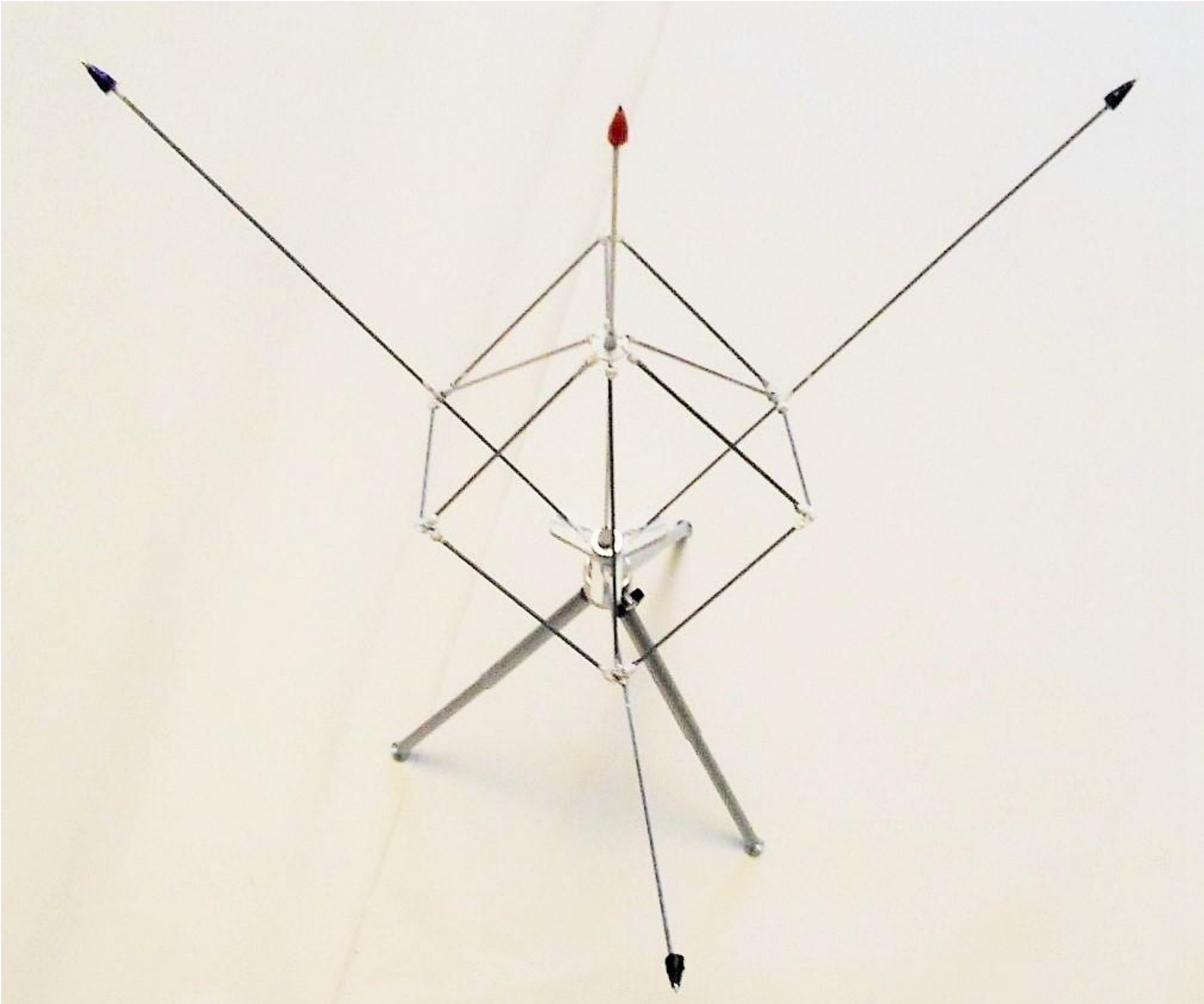

Рис.4

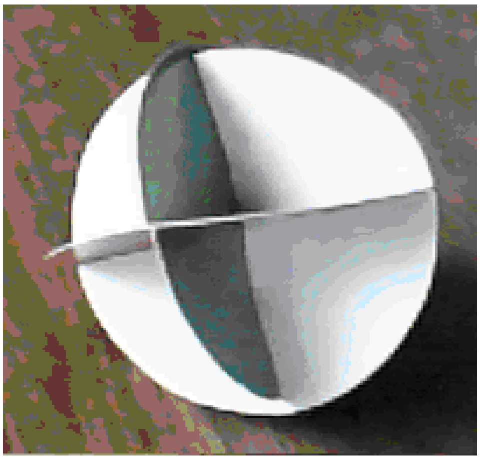

Рис.5

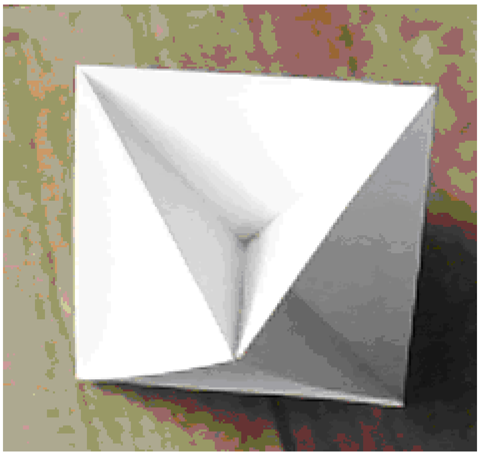

Рис.6

1.2. Определение координат точки в Декартовой прямоугольной системе координат

Главным вопросом любой системы координат является вопрос определения координат точки, находящейся в ее плоскости или пространстве.

Определение координат точки *<u>на плоскости</u>* *Декартовой системы координат.*

Положение точки ***A*** на плоскости определяется двумя координатами - ***x*** и ***y*** (рис.7). Координата ***x*** равна длине отрезка ***OB***, координата ***y*** — длине отрезка ***OC*** в выбранных единицах измерения. Отрезки ***OB*** и ***OC*** определяются линиями, проведёнными из точки ***A*** параллельно осям ***OY*** и ***OX*** соответственно. Координата ***x*** называется абсциссой (лат. *abscissa* – отрезок), координата ***y*** — ординатой (лат. *ordinates* – расположенный в порядке) точки ***A***. Записывают так:

A (x, y)

Если точка ***A*** лежит в координатном углу ***I***, то она имеет положительные абсциссу и ординату. Если точка ***A*** лежит в координатном углу ***II***, то - отрицательную абсциссу и положительную ординату. Если точка ***A*** лежит в координатном углу ***III***, то она имеет отрицательные абсциссу и ординату. Если точка ***A*** лежит в координатном углу ***IV***, то - положительную абсциссу и отрицательную ординату.

Так определяются координаты в Декартовой системе координат на плоскости.

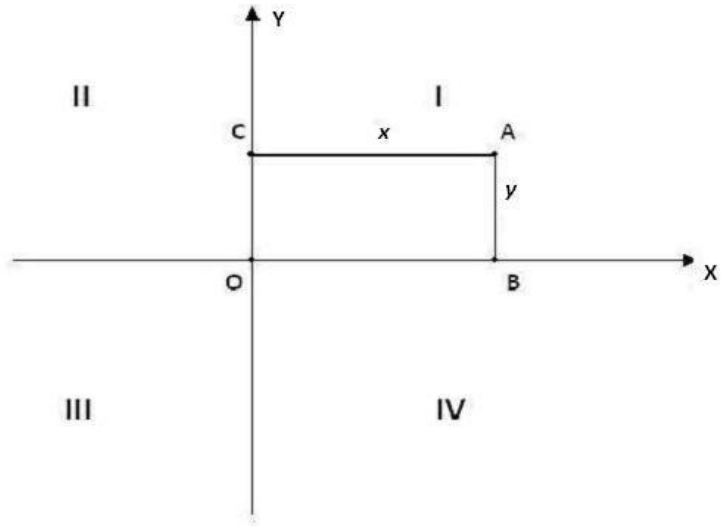

Рис.7

Определение координат точки *<u>в пространстве</u>* ***Декартовой прямоугольной системы координат***

Положение точки ***A*** в пространстве определяется тремя координатами - ***x***, ***y*** и ***z*** (рис.8). Координата ***x*** равна длине отрезка ***OC***, координата ***y***— длине отрезка ***OB***, координата ***z*** — длине отрезка ***OD*** в выбранных единицах измерения. Отрезки ***OC***, ***OB*** и ***OD*** определяются плоскостями, проведёнными из точки *А* параллельно плоскостям ***YOZ***, ***XOZ*** *и* ***XOY*** соответственно. Координата ***x*** называется абсциссой (лат. *abscissa* – отрезок), координата ***y***— ординатой (лат. *ordinates* – расположенный в порядке), координата ***z*** — аппликатой (лат. *applicata* – буквально приложенная) точки ***A***. Записывают так:

A (x, y, z)

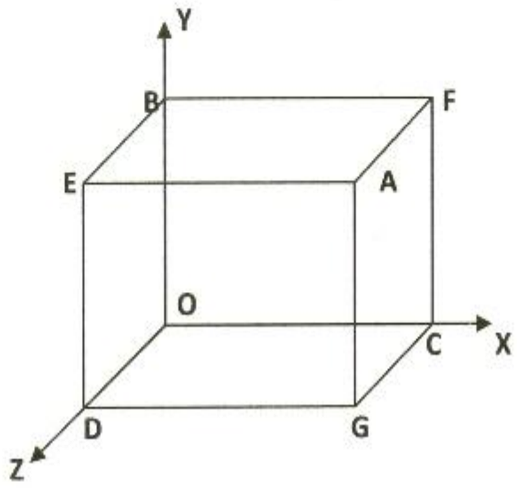

Рис.8

Реплика автора

В канонических правилах определения координат точки <u>в пространстве</u> Декартовой прямоугольной системы координат прямо не указана причинно-следственная связь между точкой и ее координатами, т.е. не вполне ясно, по расположению ли точки указываются ее координаты или, наоборот, по известным координатам точки осуществляется указание на ее местоположение. Поэтому напрашивается заголовок (вместо "*Определение координат точки <u>в пространстве</u> Декартовой прямоугольной системы координат*") "Соответствие местоположения точки … и её координат". Такой заголовок как раз и свободен от показа причинно-следственной связи.

Конечно, фраза "*Определение координат точки …*" располагает к тому, что мы должны воспринять ее как определение координат точки в пространстве по ее местонахождению напрямую. Но в этом случае возникают некоторые "неудобства" в практическом воплощении этого действия, т.е. в отсутствии инструмента привязки, без которого определить однозначно координаты точки в пространстве нет возможности. (*На рисунках 9 и 10 видно, что при отсутствии инструмента привязки одна и та же точка - точка **A** - может иметь неоднозначные координаты.*)

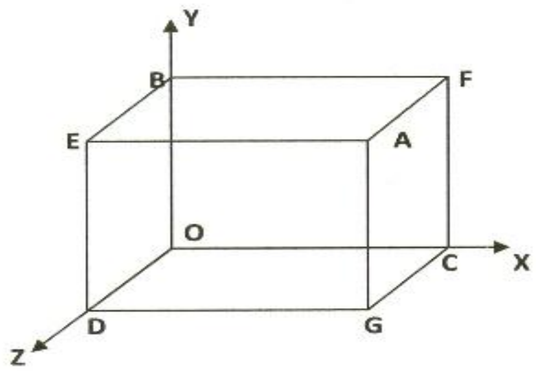

Рис.9

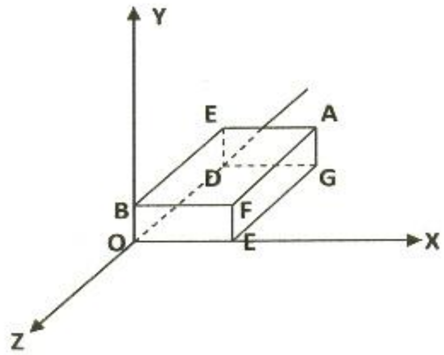

Рис.10

К примеру, в геодезии для определения координат точки на местности инструментом привязки является ближайшая реперная точка (репер) с её известными координатами. В математике же инструментом привязки могут служить исходные данные задачи (на рис.11 точка лежит в плоскости с известными параметрами ее расположения). В этом случае координаты точки будут определены однозначно.

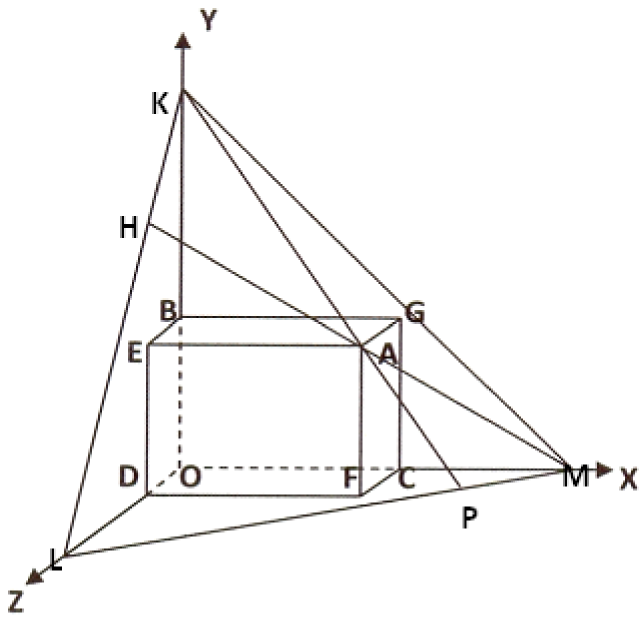

Рис.11

Авторское развитие

Развивая Декартову прямоугольную систему координат в пространстве, введем понятие “вектора направленности”, т.е. вектора $\boldsymbol{V}$, проходящего из точки начала координат (т. $\boldsymbol{O}$) через точку $\boldsymbol{A}$, координаты которой x_1, x_2 и x_3 равны друг другу (рис.12).

В результате несложных вычислений, которые здесь не приводятся, видно, что все три координатные плоскости Декартовой системы координат по отношению к вектору $\boldsymbol{V}$ расположены под одинаковыми углами, равными 30 градусам.

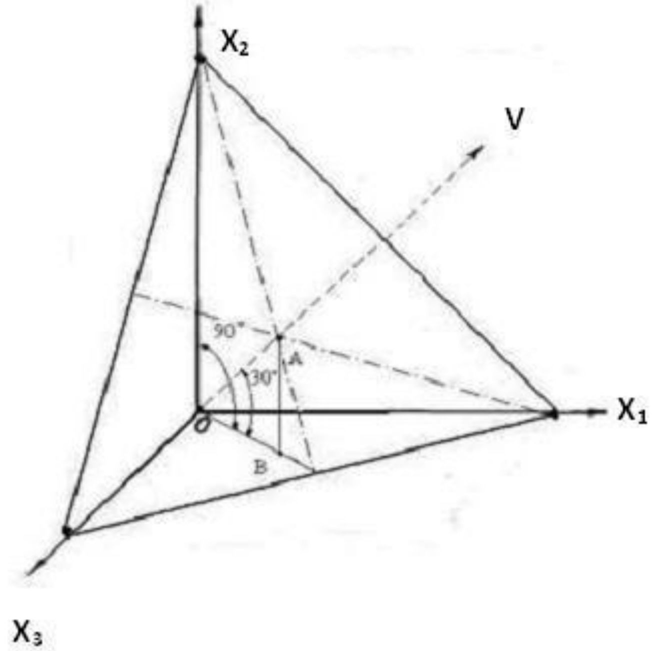

Рис.12

2. Реальная многомерная произвольно-угольная система координат в пространстве

Выше, при рассмотрении Декартовой прямоугольной системы координат в пространстве, было введено понятие “вектора направленности”, т.е. вектора ***V***, проходящего из точки начала координат (т. ***O***) через точку ***A***, координаты которой x_1, x_2 и x_3 равны друг другу (рис.12), причем ее положительная полуось проходит через положительный сектор, точка в котором имеет координаты только равные нулю или больше нуля, а отрицательная – через отрицательный сектор, точка в котором имеет координаты только равные нулю или меньше нуля. Было выяснено, что все три координатные плоскости Декартовой системы координат по отношению к вектору ***V*** расположены под одинаковым углом, равным 30 градусам. Назовем этот угол ***начальным.***

Образно трехмерную произвольно-угольную систему координат можно представить как Декартову прямоугольную систему координат, но с начальным углом в диапазоне $0 < \beta < 90$**.** Примечательно только, что в этот диапазон входит и сама Декартова прямоугольная система координат, т.е. отличие состоит лишь в том, что она образуется между тремя взаимно перпендикулярными осями координат ***OX, OY*** и ***OZ,*** как и тремя осями координат ***OX, OY*** и ***OZ***, расположенными по отношению к вектору направленности под произвольными, также равными между собой и отличными от 30 градусов, начальными углами.

Очевидно, что Декартова прямоугольная система координат представляет собой частный случай многомерной произвольно-угольной системы координат.

2.1. Построение реальной многомерной произвольно-угольной системы координат

Для большей наглядности целесообразно порядок построения произвольно-угольной системы координат показать пошагово, с помощью серии простых рисунков (рис.13 ÷ рис.17).

В сравнении с трёхмерной Декартовой системой координат построим трёхмерную произвольно-угольную систему координат (рис.11) .

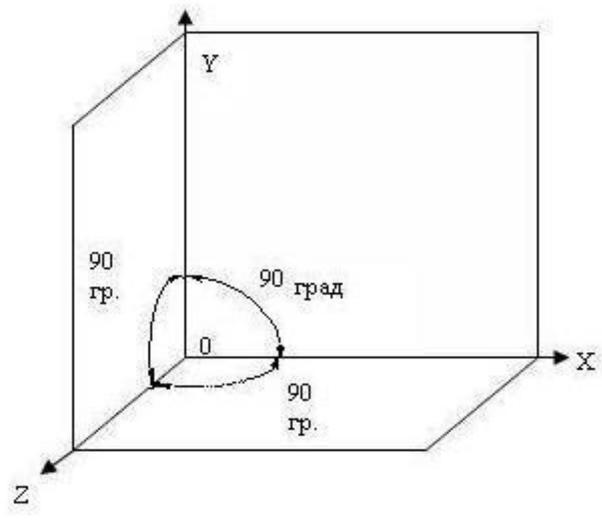

Рис.13

Уменьшим прямые углы ***YOX,YOZ*** и ***ZOX*** на 30, к примеру, градусов каждый, обозначив это уменьшение отрезками ***OA, OC*** и ***OB*** соответственно (рис.14) и проведем через них координатные плоскости новой системы (рис.15).

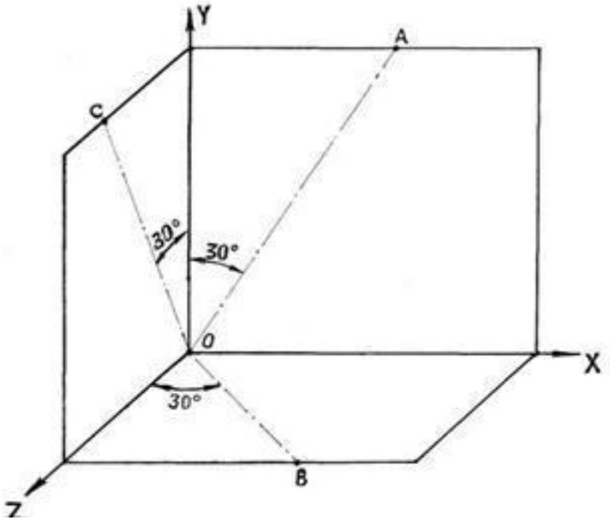

Рис.14

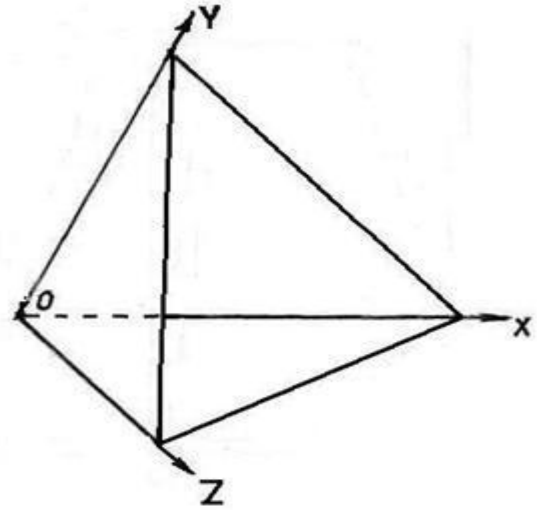

Рис.15

На рисунке 15 изображена готовая произвольно-угольная трехмерная система координат. Для сравнения полученной трёхмерной произвольно-угольной системы координат с Декартовой трехмерной же прямоугольной системой координат встроим первую в рамки второй (рис.16).

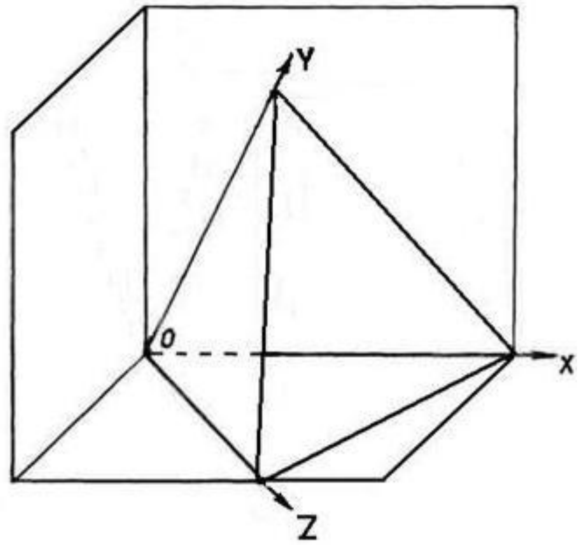

Рис.16

Используя те же методы определения координат точки ***A***, как и в Декартовой системе координат, отобразим точку ***A*** с её координатами в произвольно-угольной системе координат (рис.17).

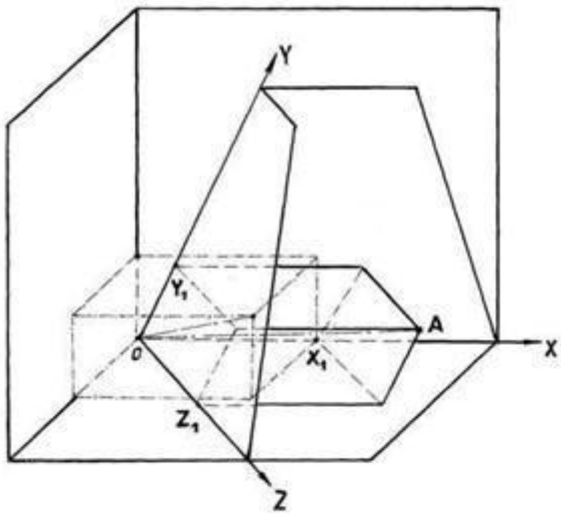

Рис.17

Из рисунка 17 видно, что параллелепипед, полученный путём ограничения пространства координатными плоскостями и введёнными через точку ***A*** параллельными им плоскостями, вытянут в сторону точки ***A***, т.е. произошла деформация параллелепипеда в сторону, продиктованную устройством трёхмерной произвольно-угольной системы координат. С точки зрения стороннего наблюдателя точка ***A*** поменяла своё положение. Но, если наблюдатель находится в точке ***A***, в любой из двух систем он наблюдает одни и те же координаты точки ***A***. Для большей и разносторонней наглядности приведём макеты трёхмерной произвольно-угольной системы координат (рисунки 18,19 и 20).

Рис.18

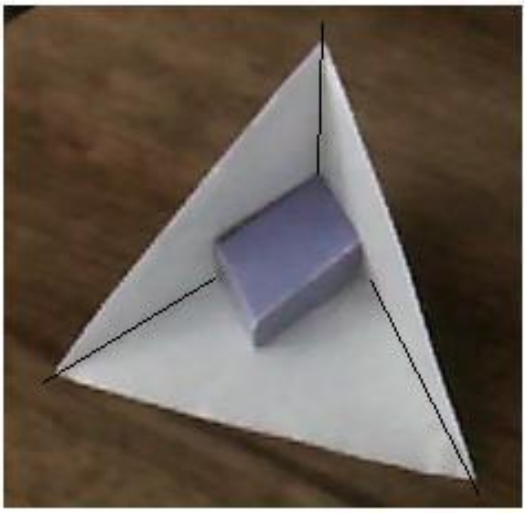

Рис.19

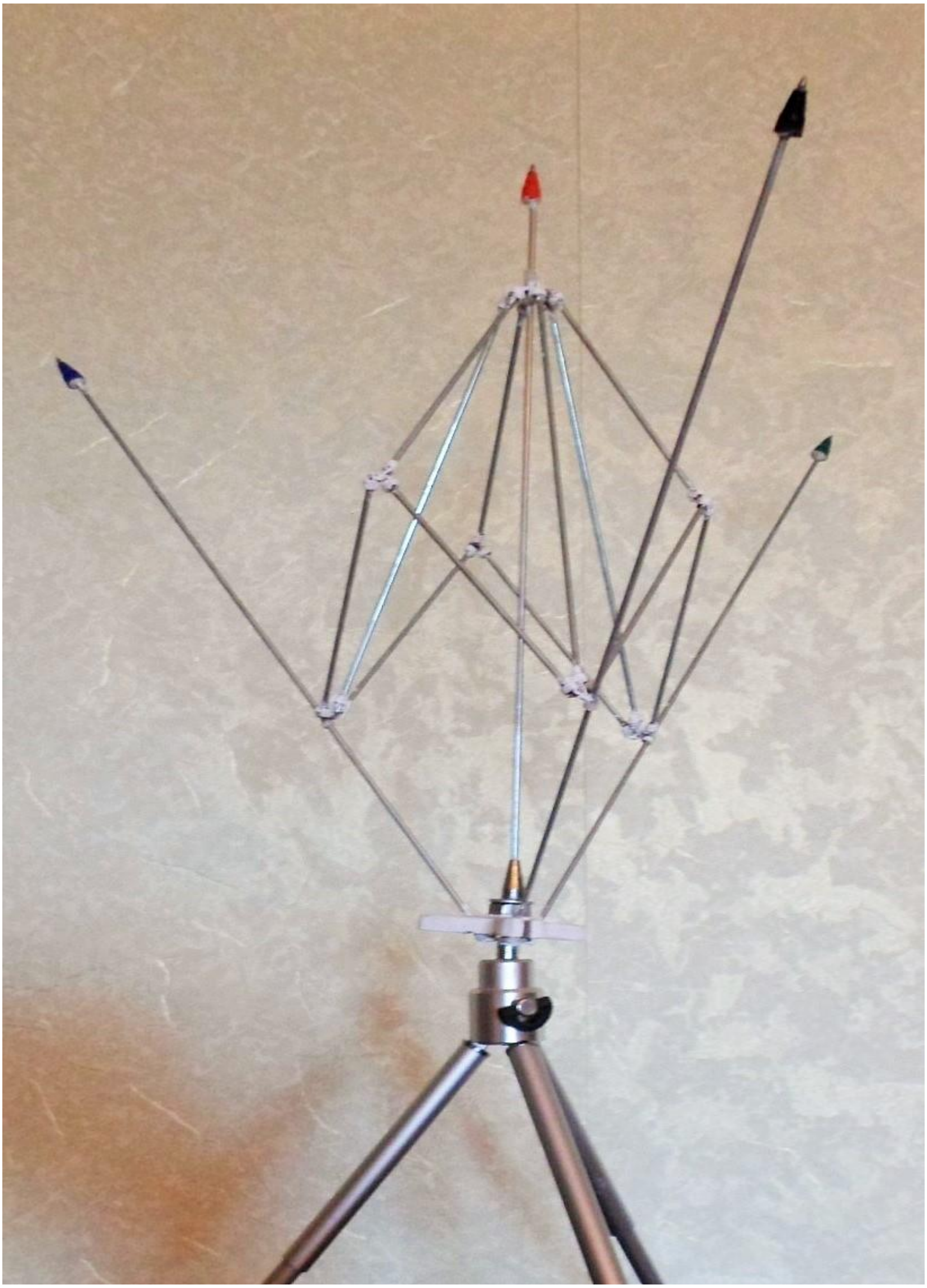

Рис.20

Говоря иначе, трёхмерная произвольно-угольная система координат была построена на основе трёхмерной Декартовой системы координат путём уменьшения начальных углов на какую-то определённую величину.

Теперь, после знакомства с принципами построения произвольно-угольной системы координат в пространстве, в частности – в трехмерном, можно дополнить утверждение, что начальный угол $\boldsymbol{\beta}$ должен быть в пределах $0 < \boldsymbol{\beta} < 90$ градусов, тем, что

- при $\boldsymbol{\beta} = 0$ градусов координатные оси произвольно-угольной системы координат вырождаются в одну прямую – линию пересечения всех координатных плоскостей, которая при этом сливается с вектором направленности,

- при $\boldsymbol{\beta} = 90$ градусов координатные плоскости сливаются в одну плоскость, расположенную перпендикулярно вектору направленности, а координатные оси при этом сливаются, утрачивая свое назначение, с этой плоскостью.

Теперь можно сформулировать

Общие принципы построения многомерной произвольно-угольной системы координат:

- проводим вектор направленности;
- задаёмся начальным углом $0 < \beta < 90$;
- отмечаем на векторе направленности точку начала координат;
- через неё (под начальным углом к векторной оси) проводим координатные плоскости.

Вообще говоря, эти принципы построения подходят и для Декартовой системы координат, у которой начальный угол установлен жестко равным 30 градусам (рис.12).

До этих пор мы рассматривали системы координат в односекторном представлении, т.е. все построения велись в секторе, где точка ***A*** имеет лишь положительные координаты или равные нулю.

Достроим полученную трёхмерную произвольно-угольную систему координат недостающими секторами и проведём через центр получившейся фигуры вектор направленности ***V***, т.е. прямую, проходящую через начало координат (точку ***O***), каждая точка которой находится на равном расстоянии от каждой координатной плоскости, и всей фигуре придадим вертикальное положение, т.е., сообразуясь с вертикальным положением векторной оси ***V*** (рис.24).

На рисунках 21, 22 и 23 представлены макеты четырехмерной, пятимерной и шестимерной произвольно-угольной системы координат соответственно, построенных аналогичным образом.

Рис.21

Рис.22

Рис. 23

2.1 Определение координат точки на плоскости и в пространстве произвольно-угольной системы координат

Определение координат точки** на плоскости **произвольно-угольной системы координат.

Определение координат точки в произвольно-угольной системе координат на плоскости (рис.24) осуществляется так же, как и в Декартовой прямоугольной системе координат, т.е. положение точки $\boldsymbol{A}$ на плоскости определяется двумя координатами - $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$, к примеру. Координата $\boldsymbol{x_1}$ равна длине отрезка $\boldsymbol{OA_1}$, координата $\boldsymbol{x_2}$ — длине отрезка $\boldsymbol{OA_2}$ в выбранных единицах измерения. Отрезки $\boldsymbol{OA_1}$ и $\boldsymbol{OA_2}$ определяются линиями, проведёнными из точки $\boldsymbol{A}$ параллельно осям $\boldsymbol{OX_2}$ и $\boldsymbol{OX_1}$ соответственно. Координата $\boldsymbol{x_1}$ называется примой (лат. *prima* – первый), координата $\boldsymbol{x_2}$ — секундой (лат. *secundo* – второй) точки $\boldsymbol{A}$. Записывают так:

$$\boldsymbol{A\ (x_1, x_2)}$$

Если точка $\boldsymbol{A}$ лежит в координатном углу ***I***, то она имеет положительные приму и секунду.

Если точка $\boldsymbol{A}$ лежит в координатном углу ***II***, то - отрицательную приму и положительную секунду.

Если точка $\boldsymbol{A}$ лежит в координатном углу ***III***, то точка $\boldsymbol{A}$ имеет отрицательные приму и секунду.

Если точка $\boldsymbol{A}$ лежит в координатном углу ***IV***, то точка $\boldsymbol{A}$ имеет положительную приму и отрицательную секунду.

Так определяются координаты на плоскости произвольно-угольной системы координат.

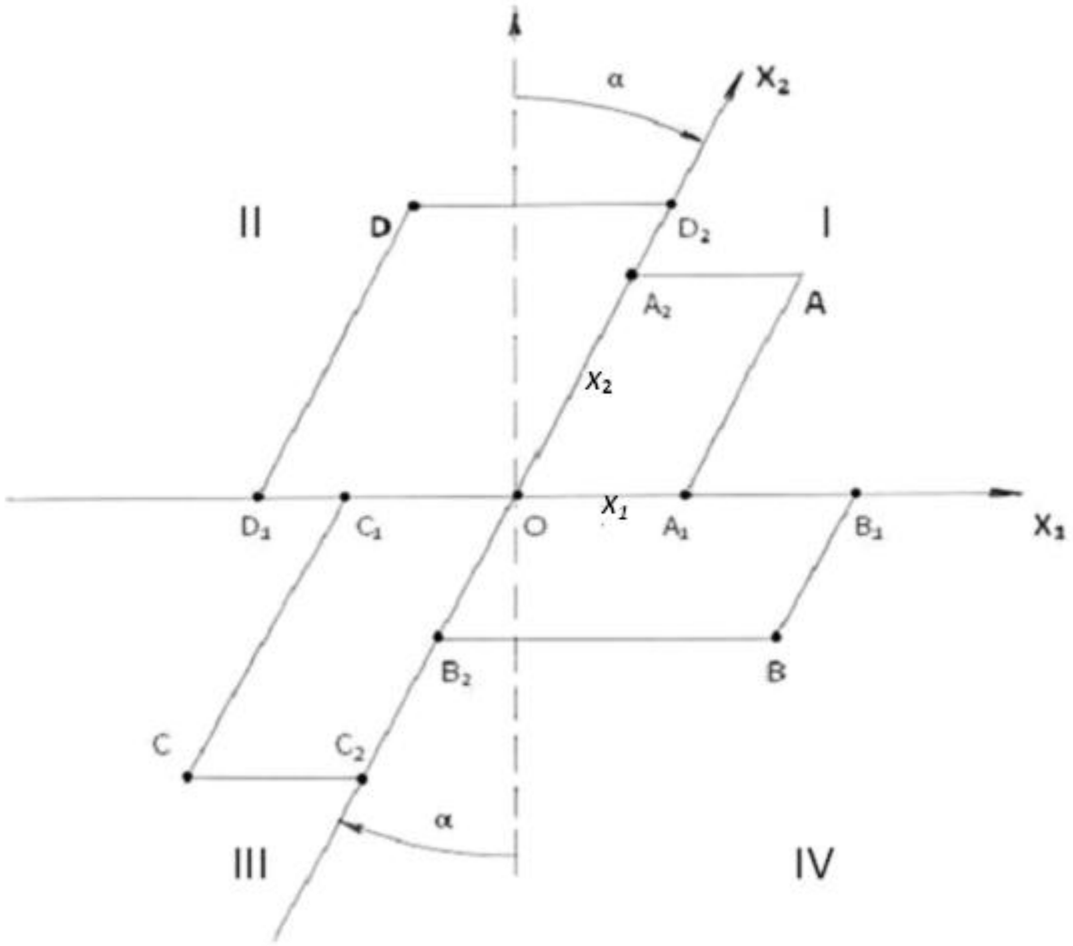

Рис.24

Определение координат точки *<u>в пространстве</u>* ***произвольно-угольной системы координат.***

Определение координат точки ***в трехмерном пространстве*** произвольно-угольной системы координат.

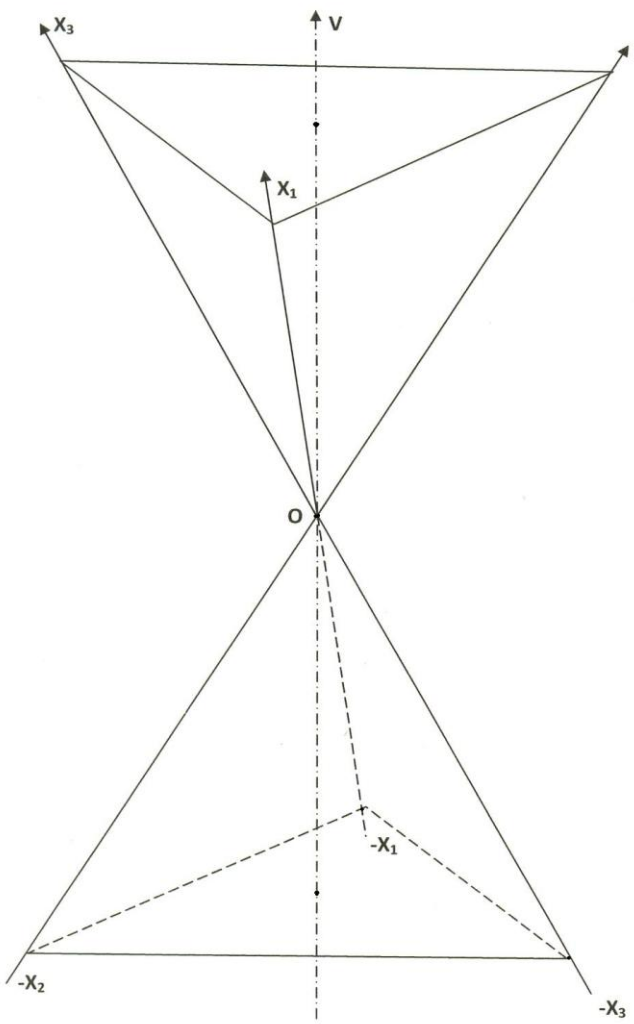

Рис.25

Определение координат точки в трехмерном пространстве произвольно-угольной системы координат (рисунки 26 и 27) осуществляется так же, как и в трехмерном пространстве Декартовой прямоугольной системы координат.

Начертание рисунка произвольно-угольной трехмерной системы координат для определения координат находящейся в ее пространстве координатной точки ***A*** можно осуществлять как в планиметрическом, так и в аксонометрическом виде. В данном же случае выбрано более простое и наглядное *<u>планиметрическое</u>* начертание рисунков (рисунки 26 и 27) .

На рис.26 секущие плоскости ***KLM***, ***BCD*** и ***EFG***, проходящие параллельно соответствующим координатным плоскостям и пересекающие при этом определенные координатные оси $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$ и X_3, указывают тем самым на координаты $x_1 = OM$, $x_2 = OD$ и $x_3 = OG$ соответственно.

На рис.27 параллельно отрезкам ***CO***, ***DO*** и ***BO*** отраженных лучей ***ECO***, ***FDO*** и ***GBO*** проведены отрезки ***AM***, ***AK*** и ***AL***, указывающие на точно такие же, как и на рис.26, координаты $x_1 = OM$, $x_2 = OK$ и $x_3 = OL$ соответственно.

Координата x_1 называется примой (лат. *prima* – первый, координата x_2 — секундой (лат. *secundo* – второй, координата x_3 — терцией (лат. *atertia* – третий) точки ***A***.

Записываюттак: $A\ (x_1, x_2, x_3)$

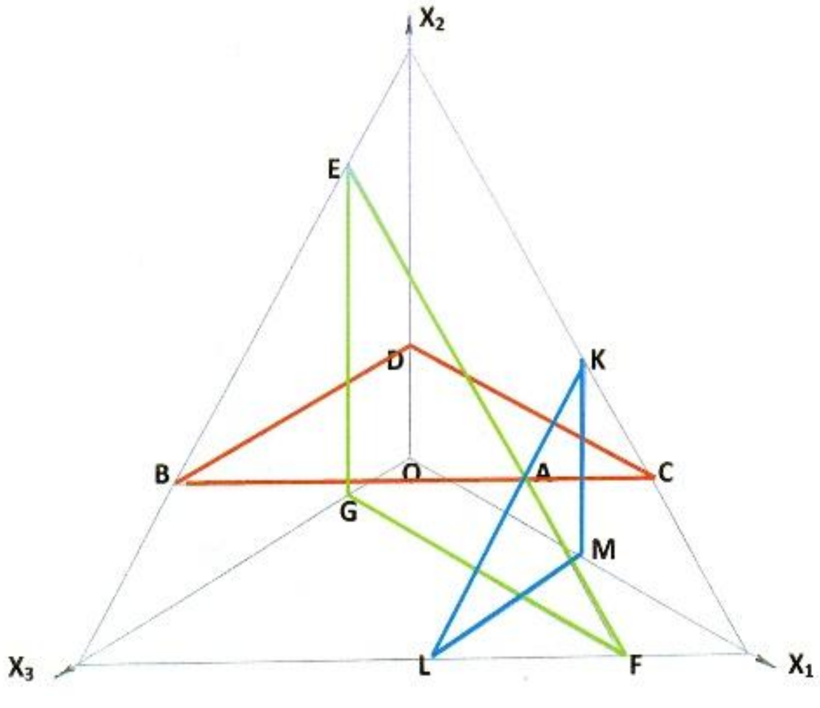

Рис.26 Определение координат точки ***A*** плоскостным методом

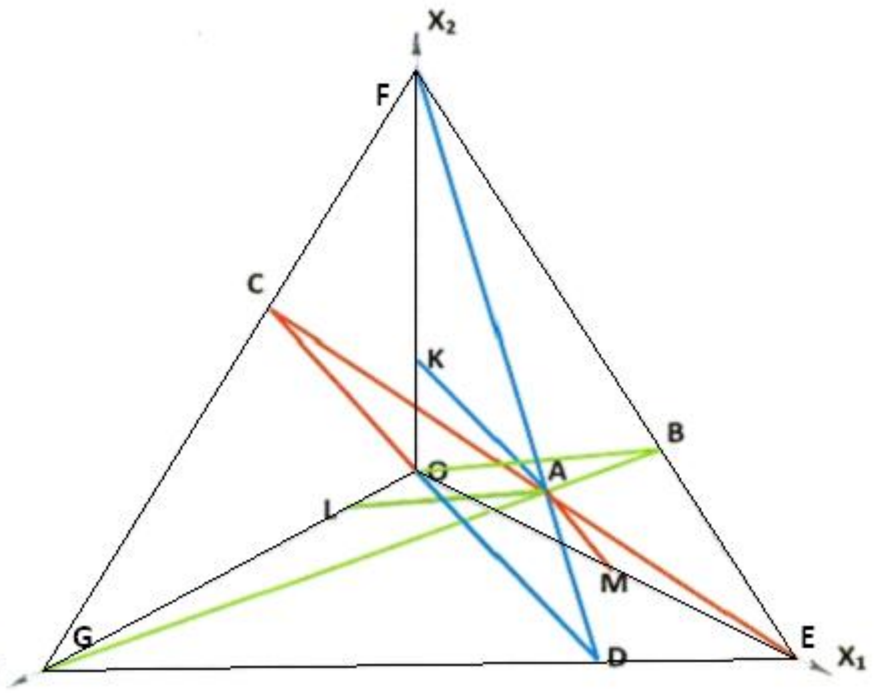

Рис.27 Определение координат точки ***A*** лучевым методом

Аналогичным образом определяются координаты точки ***A***, расположенной в четырехмерном, пятимерном и т. д. пространстве произвольно-угольной системы координат (рисунки 29 и 30).

<u>Определение координат точки в пятимерной произвольно-угольнолй системе координат.</u>

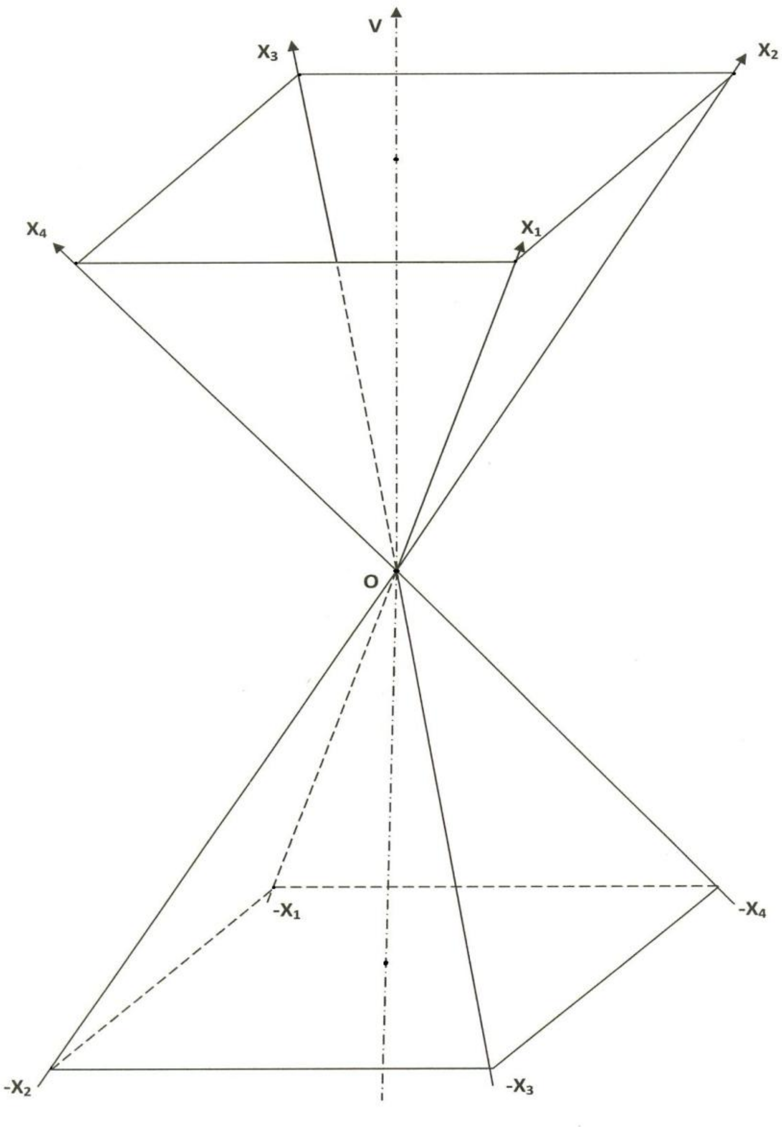

Рис.28

На рис.29 секущие плоскости ***UTSW***, ***UTED***, ***KMNB*** и ***KMLC,*** проходящие параллельно соответствующим координатным плоскостям и пересекающие при этом координатные оси X_1, X_2, X_3 и X_4, указывают тем самым на координаты $x_1 = OC$, $x_2 = OD$ $x_3 = OE$ и $x_4 = OB$.

На рис.30 параллельно отрезкам ***FO***, ***KO***, ***HO*** и ***GO*** отраженных лучей ***PFO***, ***MKO***, ***LHO*** и ***NGO*** проведены отрезки ***AD,*** ***AC,*** ***AB*** и ***AE***, указывающие на точно такие же, как и на рис.29, координаты $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{OD}$, $\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{OC}$, $\boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{OB}$ и $\boldsymbol{x_4} = \boldsymbol{OE}$ соответственно.

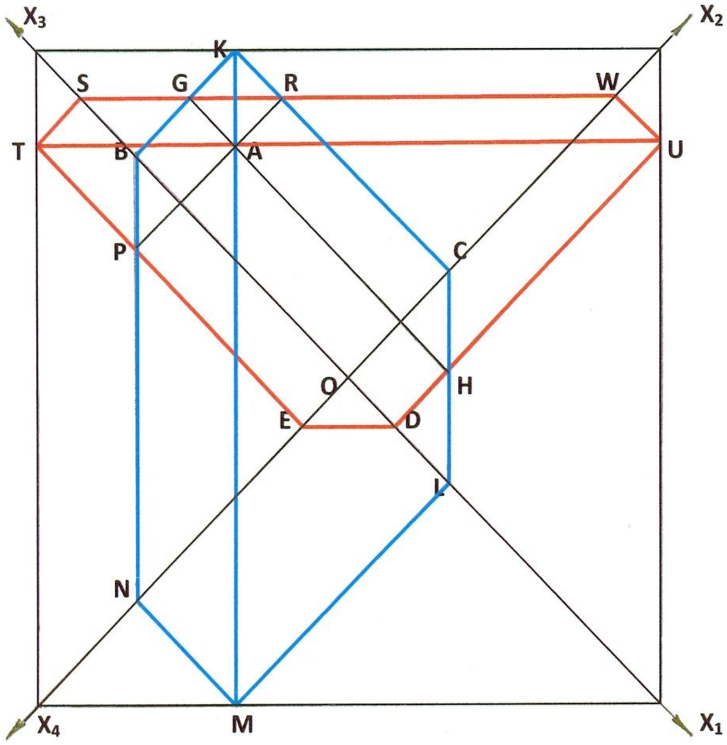

Рис.29

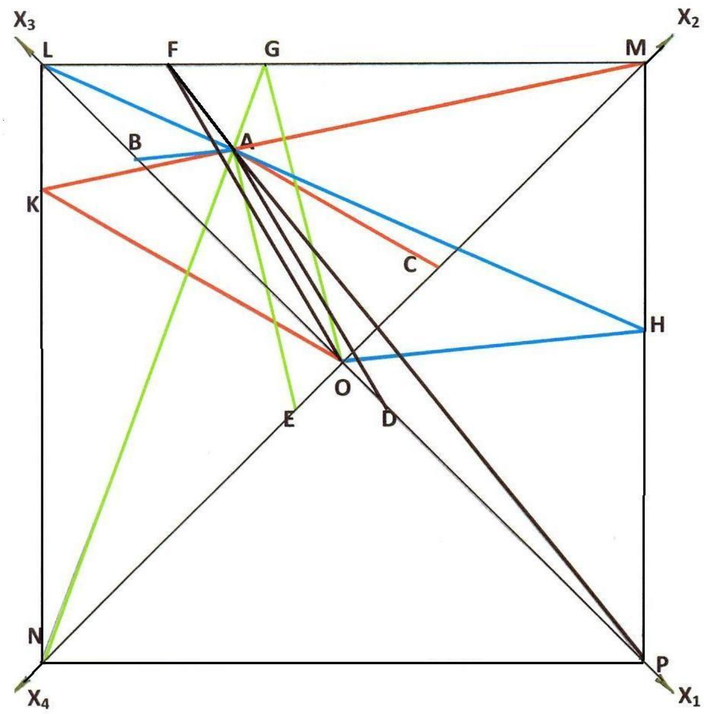

Рис.30

<u>Определение координат точки в пятимерной произвольно-угольнолй системе координат.</u>

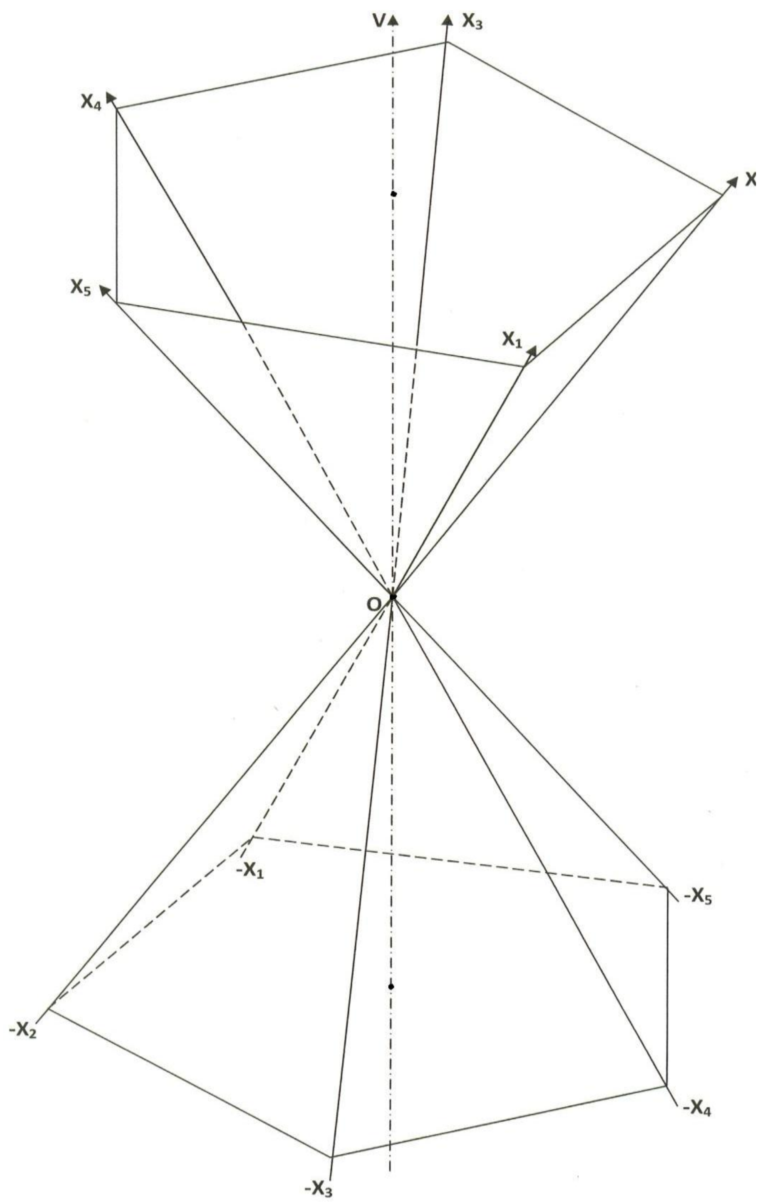

Рис.31

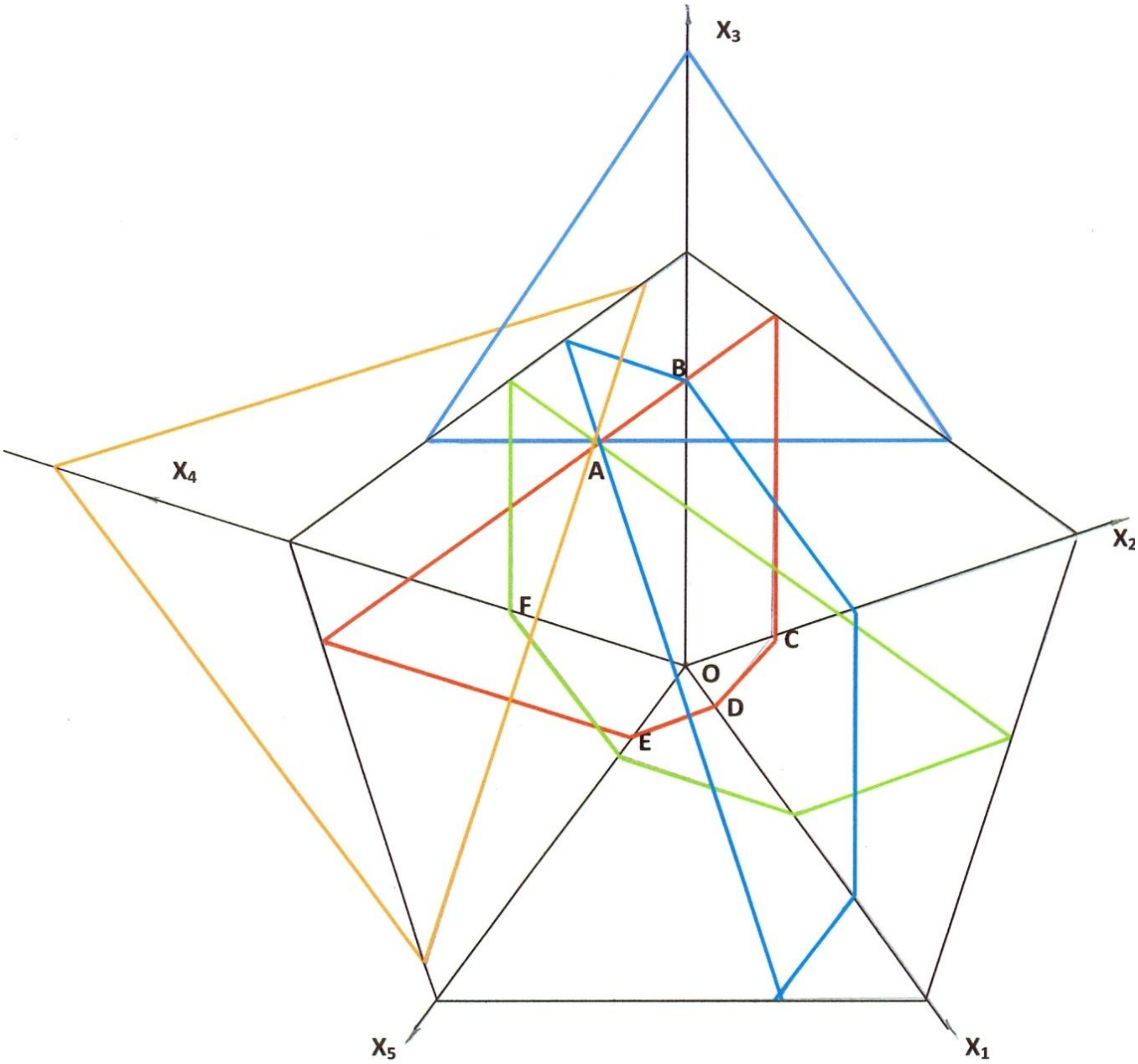

Рис.32

На рис.32 секущие плоскости, окрашенные в красный, зеленый, синий, голубой и оранжевый цвета, проходящие параллельно соответствующим координатным плоскостям и пересекающие при этом координатные оси $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, $\boldsymbol{X_3}$, $\boldsymbol{X_4}$ и $\boldsymbol{X_5}$, указывают тем самым на координаты $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{OD}$, $\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{OC}$ $\boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{OB}$, $X_4 = \boldsymbol{OF}$ и $\boldsymbol{x_5} = \boldsymbol{OE}$.

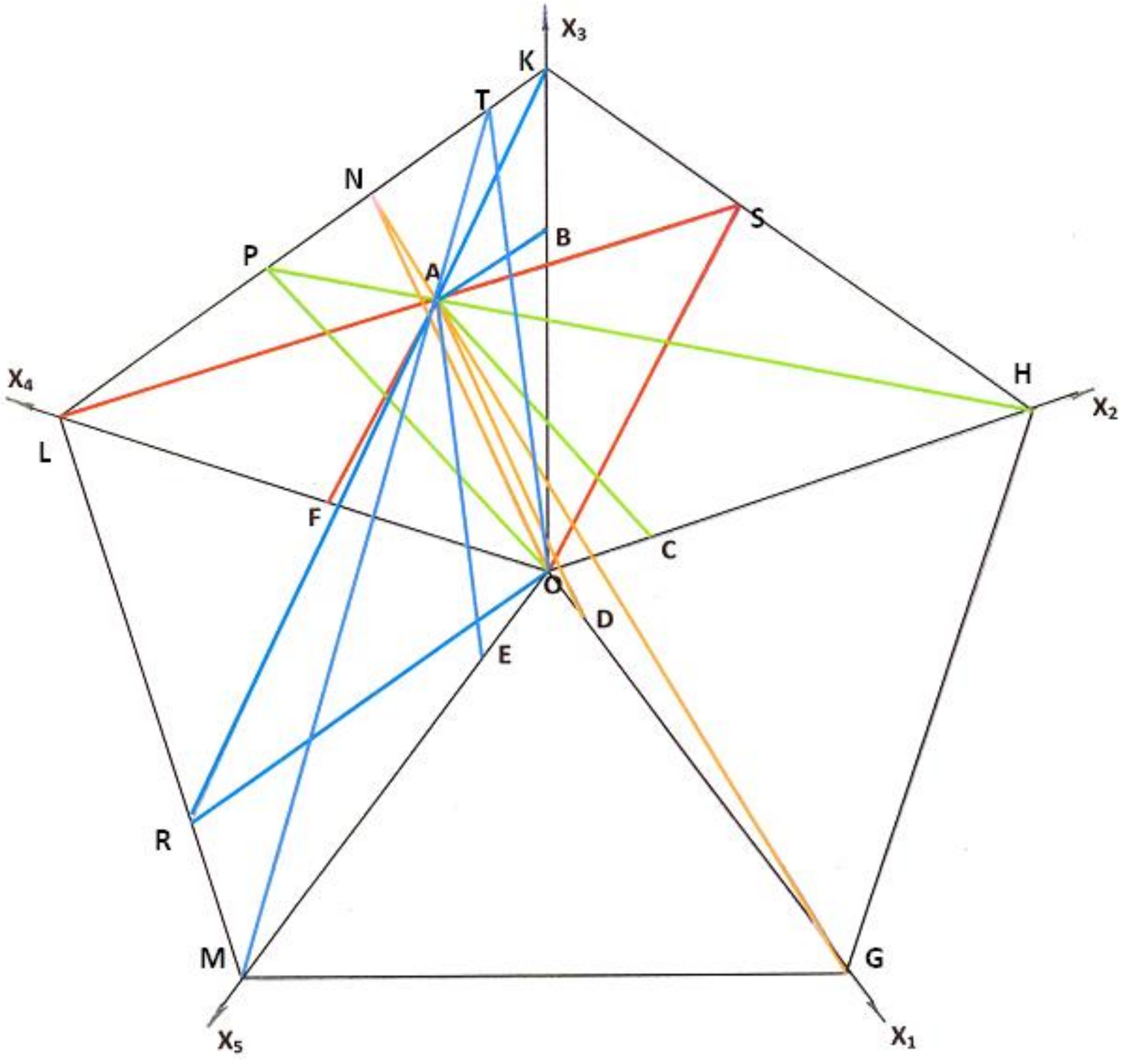

Рис.33

На рис.33 параллельно отрезкам ***NO, PO, RO, SO*** и ***TO*** отраженных лучей ***CNO***, ***HPO***, ***KRO, LSO*** и ***MTO*** проведены отрезки ***AD, AC, AB, AF*** и ***AE***, указывающие на точно такие же, как и на рис.32, координаты x_1 = ***OD***, x_2 = ***OC***, x_3 = ***OB***, x_4 = ***OF*** и x_5 = ***OE*** соответственно.

3. Заключение

Можно было бы продолжить рассмотрение многомерности на примерах 6-, 7-, 8-, 9-мерной и т.д. произвольно-угольной многомерной системы координат. Но с каждым повышением размерности начертание рисунков усложняется. Усложняется изготовление макетов, значительно усложняется абстрактное проникновение в суть задачи.

Правда, и по этим уже рассмотренным четырём (2-х, 3-х, 4-х и 5-ти) размерностям прослеживается определённая закономерность, которую можно распространить и на произвольно-угольную многомерную систему координат большей размерности. Может быть, когда-то найдётся пытливый последователь, опытный программист, который на основе этой работы создаст программу, с помощью которой, задав определённые параметры систем координат любой размерности, не только сможет в режиме 3D (или – 4D) отображать её во вращении на экране, но и решать математические задачи большей сложности и большей актуальности уже не с помощью рисунков, изобилие которых читатель успел прочувствовать на себе, но и с помощью вычислительной техники. В частности, остается открытым вопрос математического (формульного) доказательства (а может оказаться, что – опровержения) всего вышесказанного, а особенно – доказать, что решением “полнокровной” системы уравнений в пространстве многомерной произвольно-угольной системы координат является точка, общая для образов всех уравнений, входящих в систему!

4. Глоссарий

Ранг произвольно-угольной системы координат – количество координатных осей (или плоскостей) в системе координат;

Вектор направленности – проходящая через начало координат прямая линия, каждая точка которой находится на равном расстоянии от каждой координатной плоскости;

Начальный угол – угол между вектором направленности и координатной плоскостью;

Ограничительная плоскость **–** плоскость, перпендикулярная вектору направленности и служащая для устойчивого зрительного восприятия изображенной на рисунке системы координат;

Секущая плоскость – плоскость, параллельная координатной плоскости;

Конец статьи