Графическое решение систем алгебраических линейных уравнений и задач линейного программирования в трёхмерной прямоугольной и в многомерной произвольно-угольной системах координат.

Графическое решение систем алгебраических линейных уравнений в Декартовой прямоугольной системе координат *на плоскости*

В курсе элементарной алгебры изучается один способ графического исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений второго порядка, который можно применить к системам с двумя неизвестными независимо от числа уравнений. По этому способу мы строим прямые, соответствующие уравнениям системы, т.е. строим образы уравнений системы. Эти прямые могут:

- пересекаться в единственной точке, когда решением служит совокупность координат точки пересечения, а система уравнений считается определенной;

- не иметь ни одной общей точки для всех прямых (в случае двух прямых это имеет место при их параллельности); система уравнений несовместна;

- иметь бесконечно много общих для всех прямых точек (если прямые сливаются); система - неопределенная, совокупность координат любой общей точки всех прямых даст частное решение системы.

Существует достаточно много учебных источников, описывающих графическое решение линейных уравнений второго порядка, т.е. систем с двумя неизвестными независимо от числа уравнений. Поэтому в данной работе приводится лишь один пример решения таких линейных систем уравнений с помощью Декартовой прямоугольной системы координат на плоскости.

Пример 1. Решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными с помощью Декартовой прямоугольной системы координат графическим методом (рис.1).

$$\begin{cases} 3x_1 - 2\,x_2 = 6, & \text{красная прямая} \\ 2x_1 + 4\,x_2 = 8. & \text{зеленая прямая} \end{cases}$$

Для этого построим Декартову прямоугольную систему координат на плоскости **OX_1X_2**, проведем прямые (красную и зеленую), характеризующие первое и второе уравнения соответственно (т.е. построим образы уравнений), в результате чего получим точку их пересечения – точку ***A*** и ее координаты $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0.75$ Они и явятся решением данной системы уравнений.

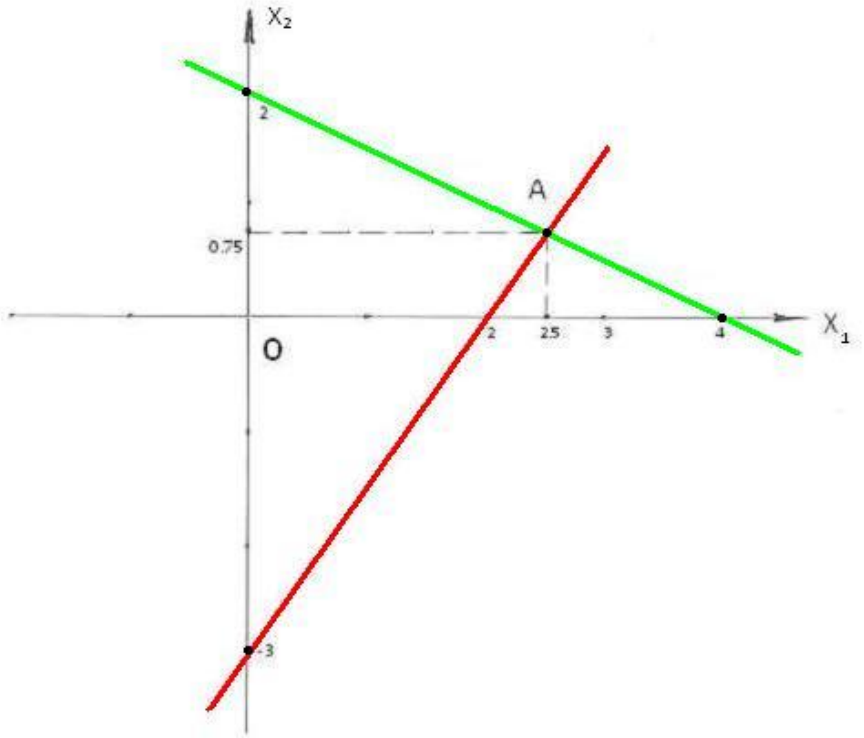

Рис.1

Графическое решение систем алгебраических линейных уравнений в *пространстве* ***Декартовой прямоугольной системы координат***

Автору пришлось потратить много усилий в поисках внятного примера графического решения системы линейных уравнений третьего порядка (т.е. когда количество уравнений и количество неизвестных равны трем) с помощью Декартовой прямоугольной системы координат. Эти усилия не увенчались успехом. Только в Интернете скромно прозвучало одно утверждение: “К сожалению, этот удобный и наглядный способ исследования и решения систем линейных уравнений не может быть применен к системам уравнений, содержащим более двух неизвестных, т.к. на плоскости нет геометрического образа, который соответствовал бы уравнению с числом неизвестных, равным трем”. Этот же источник лишь утверждает, что результатом графического решения системы из трех уравнений с тремя неизвестными с помощью Декартовой прямоугольной системы координат являются координаты точки пересечения трех плоскостей, построенных в ее пространстве, исходя из содержания уравнений, входящих в эту систему, и приводит для наглядности и подтверждения этого утверждения соответствующий рисунок (рис.2).

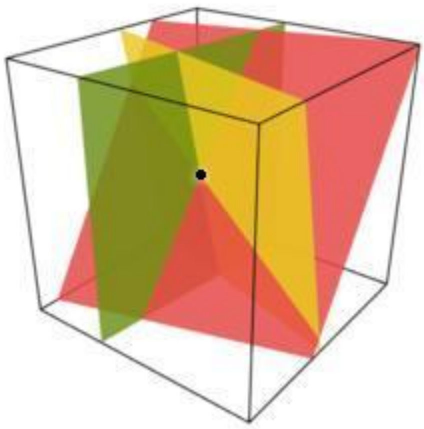

Рис.2

В соответствии с рисунком систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными определяет набор трех плоскостей. Точка пересечения этих плоскостей принадлежит каждой из них и является решением.

<u>Авторское развитие</u> решения системы из двух и трех алгебраических линейных уравнений с тремя неизвестными с помощью Декартовой прямоугольной системы координат

Если речь шла о том, что на листе бумаги (а как же еще применять графический метод?) такое решение отобразить нельзя, то автор в данной работе предлагает, реализуемый на листе бумаги, графический метод их решения. Называется он ***перекрестным***.

Приведем алгоритм этого метода решения подобных систем уравнений с помощью Декартовой прямоугольной системы координат.

<u>Алгоритм решения</u>

Решение систем алгебраических линейных уравнений с помощью Декартовой прямоугольной системы координат может выполняться в двух вариантах её изображений – аксонометрии и планиметрии. Но алгоритм решения в обоих вариантах остается тот же.

1. Построение <u>*аксонометрии*</u> ***пространства*** Декартовой прямоугольной системы координат. При этом умозрительно принимается соглашение, что осям координат кроме привычных имен-обозначений $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$ и $\boldsymbol{X_3}$ присваиваются и альтернативные имена 1, 2 и 3 соответственно. Эти, цифровые, имена при графическом решении задач имеют большую наглядность и менее “засоряют рисунок”, если не говорить, что без них обойтись нельзя.
2. Градуировка осей координат в относительных единицах измерения.
3. Построение образов исходных уравнений, т.е. нанесение стяжек в соответствии с видом уравнений и присвоение им имен. Имена стяжек имеют двузначный цифровой вид. Первая цифра номера всегда соответствует младшему номеру из двух координатных осей, которые она стягивает. Например, номер стяжки 12 означает, что она стягивает оси координат $\boldsymbol{X_1}$ и $\boldsymbol{X_2}$. Здесь же точку пересечения двух одноименных стяжек будем называть перекрестком, присваивая ему номер, аналогичный номеру одноименных перекрещивающихся в нём стяжек.
4. Выявление перекрестков и присвоение им имен.
5. Трассировка перекрестков, т.е. проведение прямолинейных трасс через разноименные перекрестки.
6. Выявление точки пересечения трасс (точки сходимости) и определение ее координат как результатов решения системы уравнений.

Решим несколько примеров.

Пример 2. Решить систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными с помощью Декартовой прямоугольной системы координат графическим методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$$

$x_j >= 0, \quad j = 1, 2, 3.$

Решение. Построим в аксонометрии Декартову прямоугольную систему координат $\boldsymbol{OX_1X_2X_3}$ (рис.3) и цветными линиями нанесем образы исходных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, & \text{- синий контур} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, & \text{- зелёный контур} \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4. & \text{- красный контур} \end{cases}$$

$\boldsymbol{x_j} >= 0, \quad \boldsymbol{j} = 1, 2, 3.$

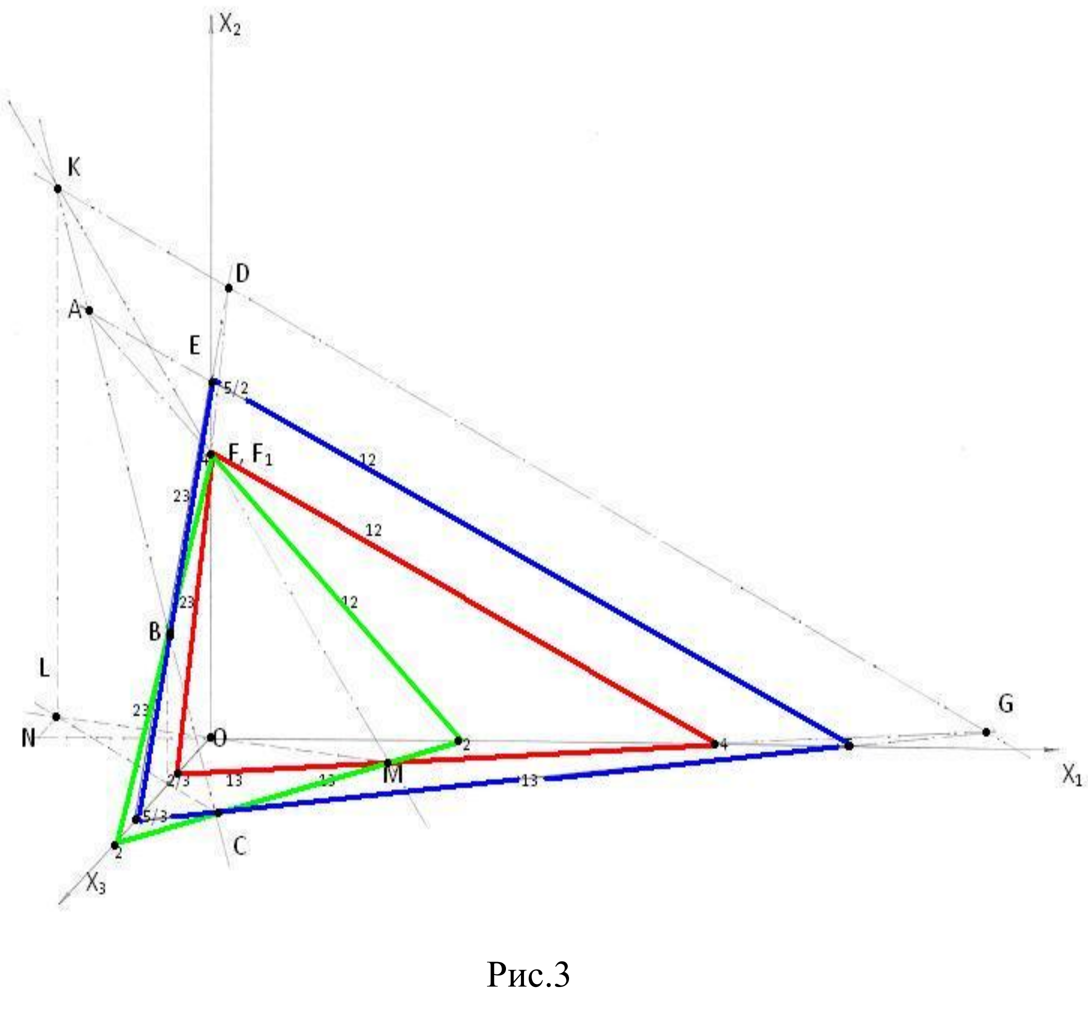

Рис.3

На рис. 3 перекрёстки обозначены ***A(12), F(12), B(23), D(23), F₁(23), C(13), G(13), M(13)*** – всего восемь. Причем, перекрестки ***F(12)*** и ***F_1(23)*** совпадают. Проведём через каждые три разноименных перекрёстка трассы.

Это – **KC(12, 13, 23), KM(12, 13, 23) и KG(, 13, 23)**. При этом вследствие параллельности двух стяжек ***12*** трасса ***KG*** имеет только два перекрёстка. Эти три трассы сошлись в точке сходимости - точке ***K***, указывая нам на единственное решение, дополнительные построения относительно которого показывают, что значения переменных таковы: $\boldsymbol{K}(-\frac{4}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{1}{3})$.

Графическое решение задач линейного программирования в пространстве Декартовой прямоугольной системы координат

Пример 3. Решить задачу линейного программирования (систему из трех уравнений с тремя неизвестными) с помощью Декартовой прямоугольной системы координат графическим методом (рис.4):

$$\boldsymbol{Z(X)} = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \rightarrow \textbf{min}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4. \end{cases}$$

$\boldsymbol{x_j} >= 0, \quad \boldsymbol{j} = 1, 2, 3.$

Решение. Построим в аксонометрии Декартову прямоугольную систему координат $\boldsymbol{OX_1X_2X_3}$ (рис.4) и цветными линиями нанесем образы исходящих уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, & \text{- синий контур} \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, & \text{- зелёный контур} \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, & \text{- красный контур} \end{cases}$$

$\mathbf{x_j} >= 0, \quad \boldsymbol{j} = 1, 2, 3.$

Выявим и поименуем (имена – в скобках) перекрестки. Их всего семь вместо максимально возможного количества, равного девяти, т.к. стяжки красная(***13***) и синяя(***13***) , также зеленая(***23***) и синяя(***23***) параллельны в своих парах. Это видно из рисунка. Поэтому соответствующие перекрестки отсутствуют.

Вот эти, обозначенные буквами, перекрестки: ***A(12), B(12), G(12), F(23), E(23)*** , ***D(13)*** и ***C(13)***. Координаты каждого из них дают свое решение. Проведя трассы через точки ***F*** и ***A***, ***C*** и ***B***, ***D*** и ***G*** замечаем, что они, встречаются в точке схождения ***K***, координаты которой также можно рассматривать как одно из решений.

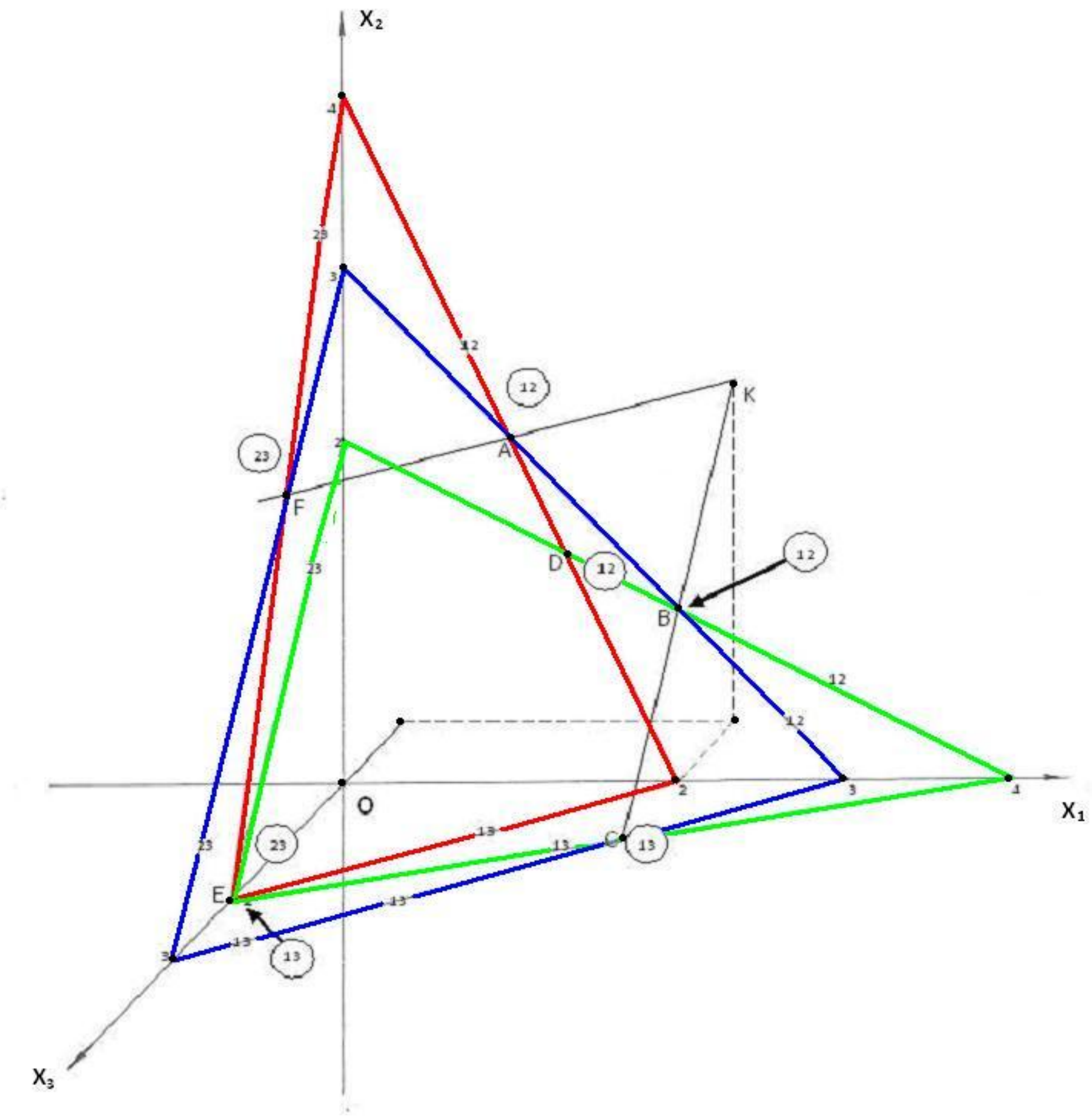

Рис.4

Координаты всех этих восьми точек определяются известным графическим способом. Для наглядности сведем их в таблицу решений (табл.1)

Примечание: Координаты точек ***E(23)*** и ***D(13)*** совпадают. Решение ***K*** не подходит, т.к. в нем x_3 = -1, т.е. $x_3 < 0$, что не соответствует условиям задачи. Решение ***D(13)*** не подходит, т.к. не соответствует первому уравнению.

Из оставшихся же решений наилучшим является решение ***G(12).*** Оно и будет являться решением данной задачи, т.е.

Ответ: ***Max Z(X)*** $= -\frac{20}{3}$ при $X^* = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0)$.

Таблица 1

Имя решения	Параметры решения			Значение целевой функции
	x_1	x_2	x_3	
A(12)	1	2	0	-8
B(12)	2	1	0	-7
G(12)	4/3	4/3	0	-20/3
F(23)	0	2	1	-10
E(23)	0	0	2	-8
D(13)	0	0	2	-8
C(13)	2	0	1	-8
K	2	2	-1	-6

Графическое решение систем алгебраических линейных уравнений и задач линейного программирования с помощью многомерной произвольно - угольной системы координат

Решение систем алгебраических уравнений графическим методом в <u>двухмерной</u> произвольно-угольной системе координат

Пример 4. Решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными с помощью произвольно-угольной системы координат графическим методом. Для этого используем исходные данные, примененные в примере 1.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 6, & \text{красная прямая} \\ 2x_1 + 4x_2 = 8. & \text{зеленая прямая} \end{cases}$$

Построим произвольно-угольную систему координат на плоскости X_1OX_2, проведем прямые (красную и зеленую), характеризующие первое и второе уравнения соответственно, в результате чего получим точку их пересечения – точку A и ее координаты x_1 = 2.5, x_2 = 0.75 Они и явятся решением данной системы уравнений (рис.5).

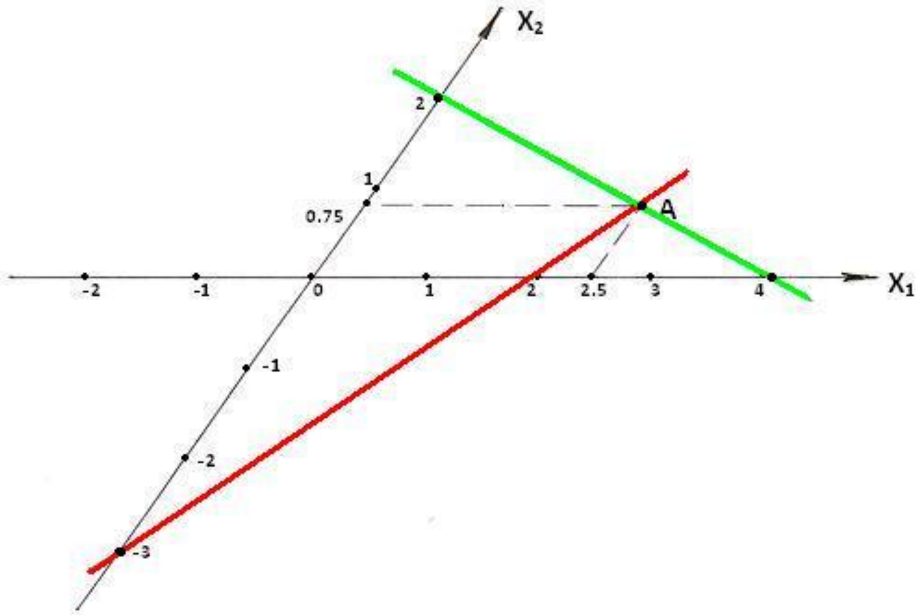

Рис.5

Решение систем алгебраических уравнений графическим методом в <u>трехмерной</u> произвольно-угольной системе координат

Пример 5. Решить систему из двух уравнений с тремя неизвестными в произвольно-угольной системе координат графическим методом.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, & \text{красный контур} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, & \text{зеленый контур} \end{cases}$$

Изобразим на плоскости произвольно-угольную трехмерную систему координат $OX_1X_2X_3$ и построим образы первого (красный контур) и второго (зеленый контур) уравнений системы, присвоив их стяжкам соответствующие номерные имена (рис.6).

Зеленый и красный контуры пересекаются по прямой AB, координаты концевых (A, B) и промежуточных (C, D) точек которой являются частными решениями из их бесконечного множества на ней.

Обозначим перекрестки и объединим их общей прямой AB, являющейся прямой пересечения плоскостей, ограниченных красным и зеленым контурами.

Отметим значения координат точек ***A, B, C*** и ***D*** на соответствующих осях координат. Они и будут являться частными решениями из множества решений на прямой ***AB***.

Ответ: $\boldsymbol{A}(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}$, $\boldsymbol{B}(-1, 6, 0)$, $\boldsymbol{C}(0, 1, 1)$, $\boldsymbol{D}(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4})$.

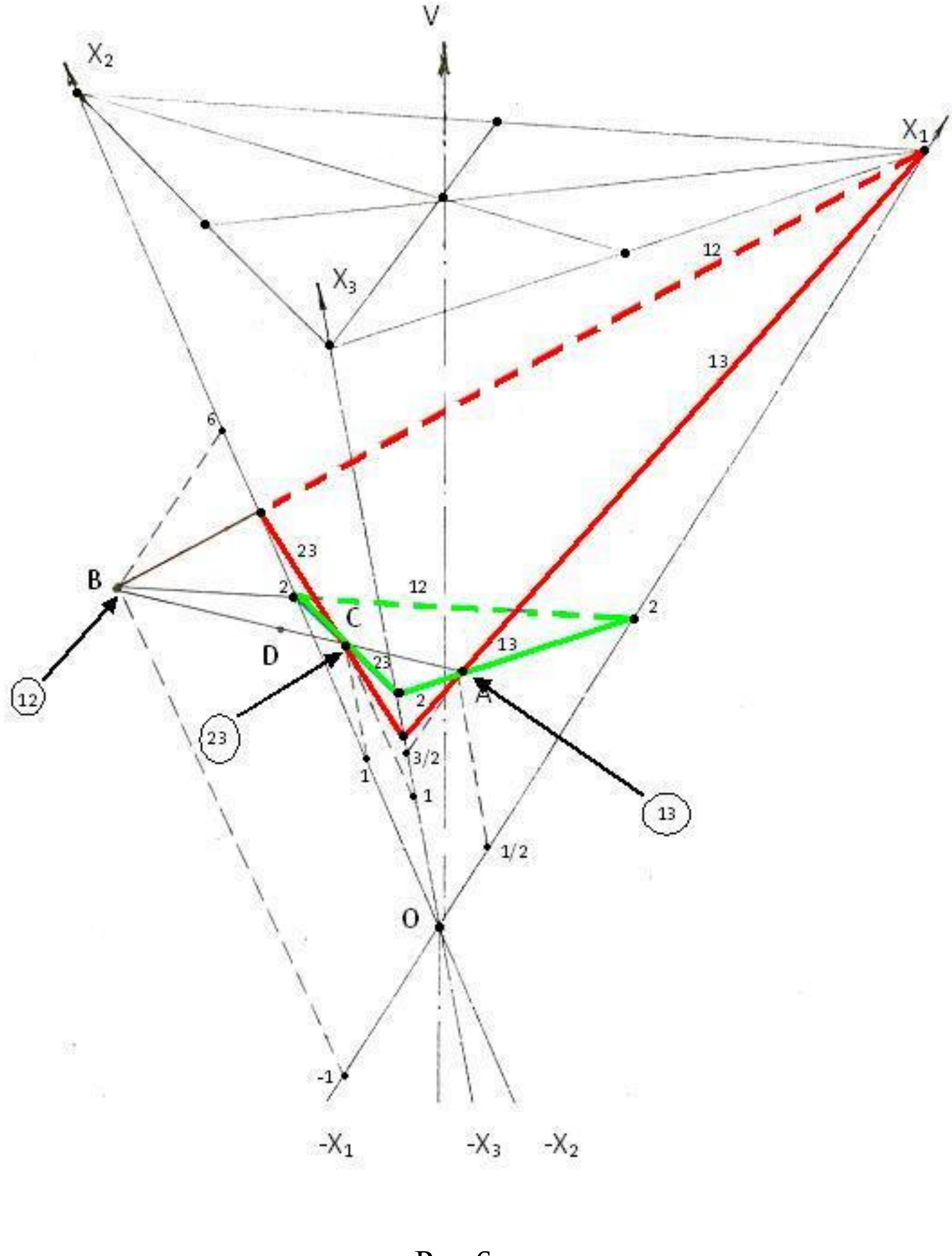

Рис.6

Пример 6. Решить систему из трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными в произвольно-угольной системе координат графическим методом (рис.7):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, & \text{синий контур} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, & \text{зеленый контур} \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4, & \text{красный контур} \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений представлено на рисунке 7, исполненном в аксонометрии. Для решения применим перекрестный метод.

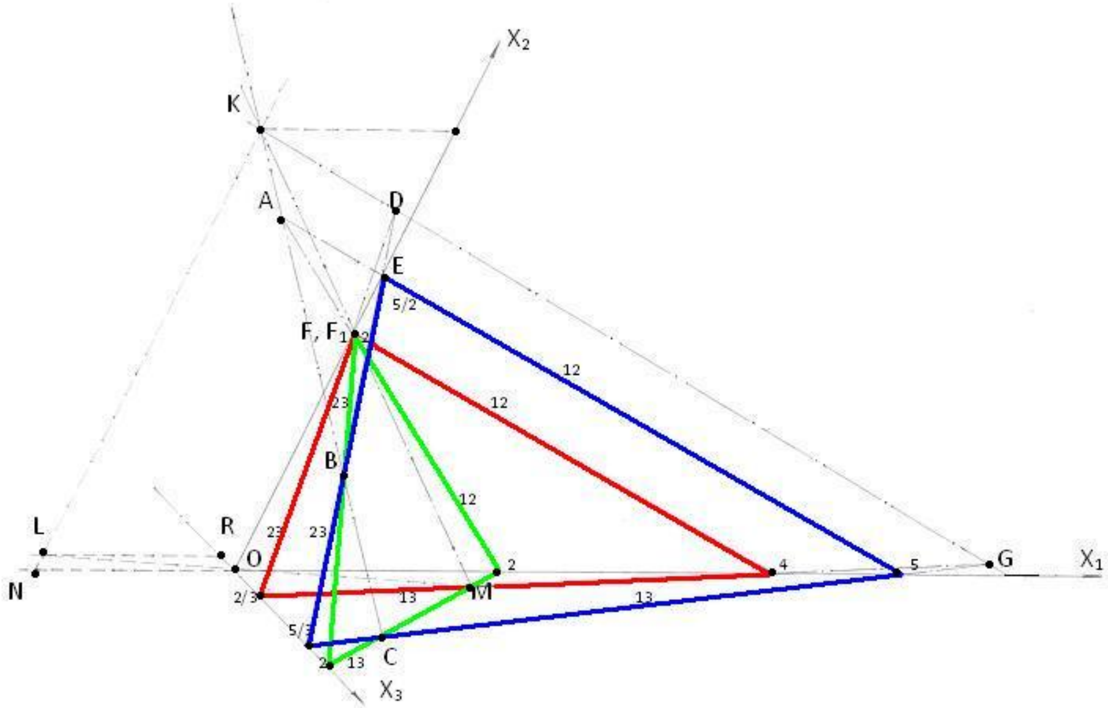

Рис.7

Для получения значений неизвестных необходимо получить координаты точки ***K***. Точка ***K*** принадлежит всем трем плоскостям. Выберем одну из них (зеленый контур) для построения схемы поиска неизвестных аргументов. Из точки $\boldsymbol{F_1}$ на основание контура через т. ***K*** опускаем линию $\boldsymbol{F_1M}$, Через точки ***M*** и ***O*** проводим линию ***KN***. Она пересечется с продолжением линии ***MO*** в т. ***L***. Параллельно оси $\boldsymbol{X_1}$ проведем линию ***LR*** до пересечения с осью $\boldsymbol{X_3}$ в точке ***R***.

Тогда $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{ON} = -\frac{4}{3}$, $\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{KN} = \frac{11}{3}$, $\boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{OR} = -\frac{1}{3}$.

Решение единственное.

Итак, значения x_1, x_2 и x_3 определены, т.е. A ($-\frac{4}{3}$, $\frac{11}{3}$, $-\frac{1}{3}$). Система уравнений с помощью произвольно-угольной системы координат графическим способом решена.

Решение систем алгебраических уравнений графическим методом в четырехмерной произвольно-угольной системе координат

Пример 7*. Решить систему из двух уравнений с четырьмя неизвестными в произвольно-угольной системе координат графическим методом (рис.8):

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 6, & \text{красная прямая} \\ 2x_2 + 3x_4 = 6. & \text{зеленая прямая} \end{cases}$$

Примечание:

По условию задачи видно, что каждое из двух уравнений представляют собой прямую линию. Эти прямые могут:

- пересекаться в единственной точке; система определенная, решением служит совокупность координат точки пересечения;

- не иметь ни одной общей точки для всех прямых (в случае двух прямых это имеет место при их параллельности); система несовместна;

- иметь бесконечно много общих для всех прямых точек (если прямые сливаются); система - неопределенная, совокупность координат любой общей точки всех прямых даст решение системы.

Умозрительно может показаться, что в данном случае налицо третий вариант, т.к. в первое уравнение можно подставлять любые, соответствующие ему, значения x_1 и x_3 (к примеру, x_1 = 1.0 и x_3 = 1.5), также и во второе уравнение можно подставлять любые, соответствующие ему, значения x_2 и x_4, (к примеру, x_2 = 6.0 и x_4 = -2.0).

Это заключение не было бы ошибочным без проверки его правильности (или ошибочности) путем решения этой задачи с помощью произвольно-угольной системы координат. Такое решение показывает, что ответом задачи является не третий из указанных выше случаев, а – первый. И всё-таки, при аналитическом подходе решение получается множественным. Налицо двойственность результатов решения. Двойственность проявляется и в Декартовой системе координат. В итоге – этот вопрос считается не изученным до конца.

Решение данной системы уравнений представлено на рисунке 8.

Красная (первое уравнение) и зеленая (второе уравнение) линии пересекаются в точке ***A***, координаты которой и будут (предположительно) единственным решением данной системы уравнений.

Ответ: (1.2, 1.2, 1.2, 1.2)

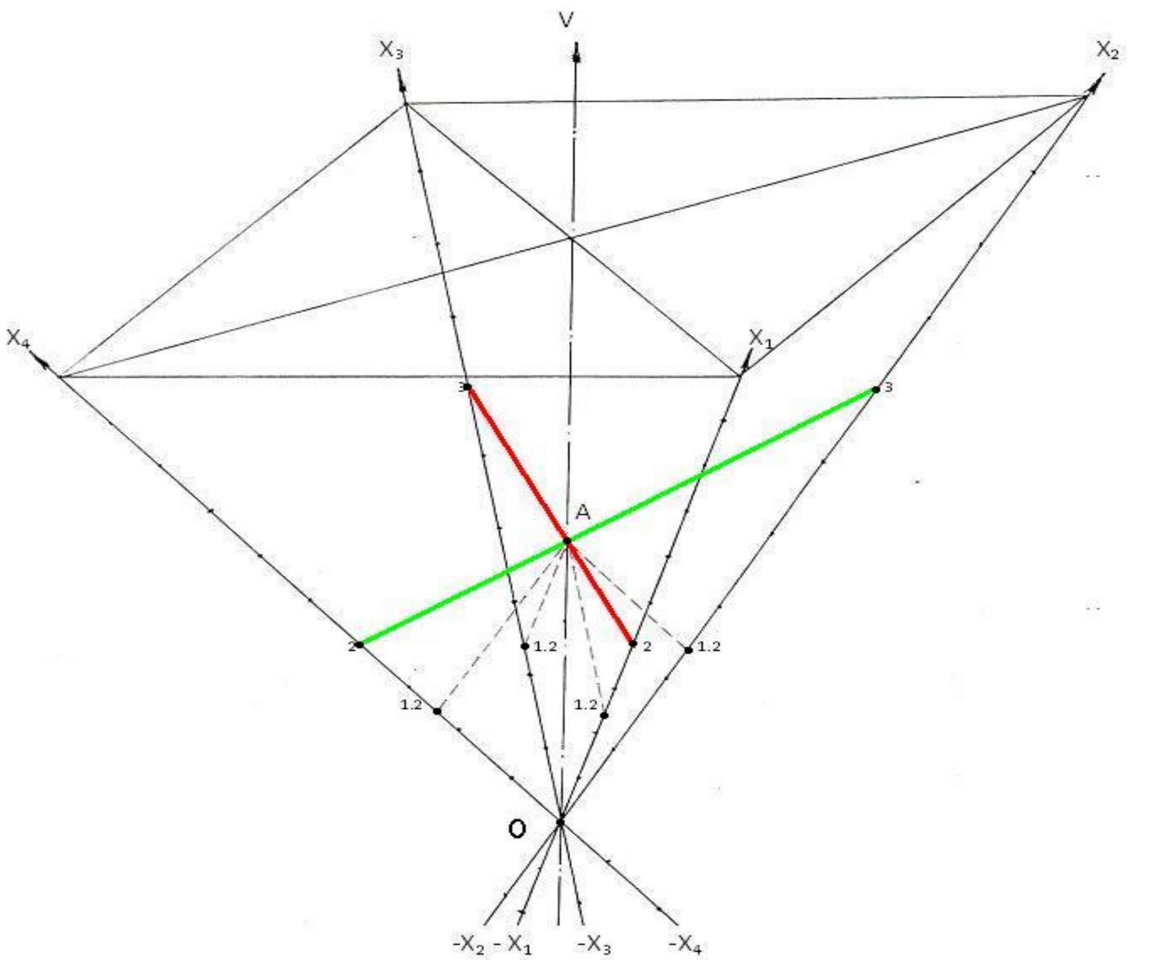

Рис.8

Пример 8.** Решить систему из двух уравнений с четырьмя неизвестными в произвольно-угольной системе координат графическим методом (рис.9):

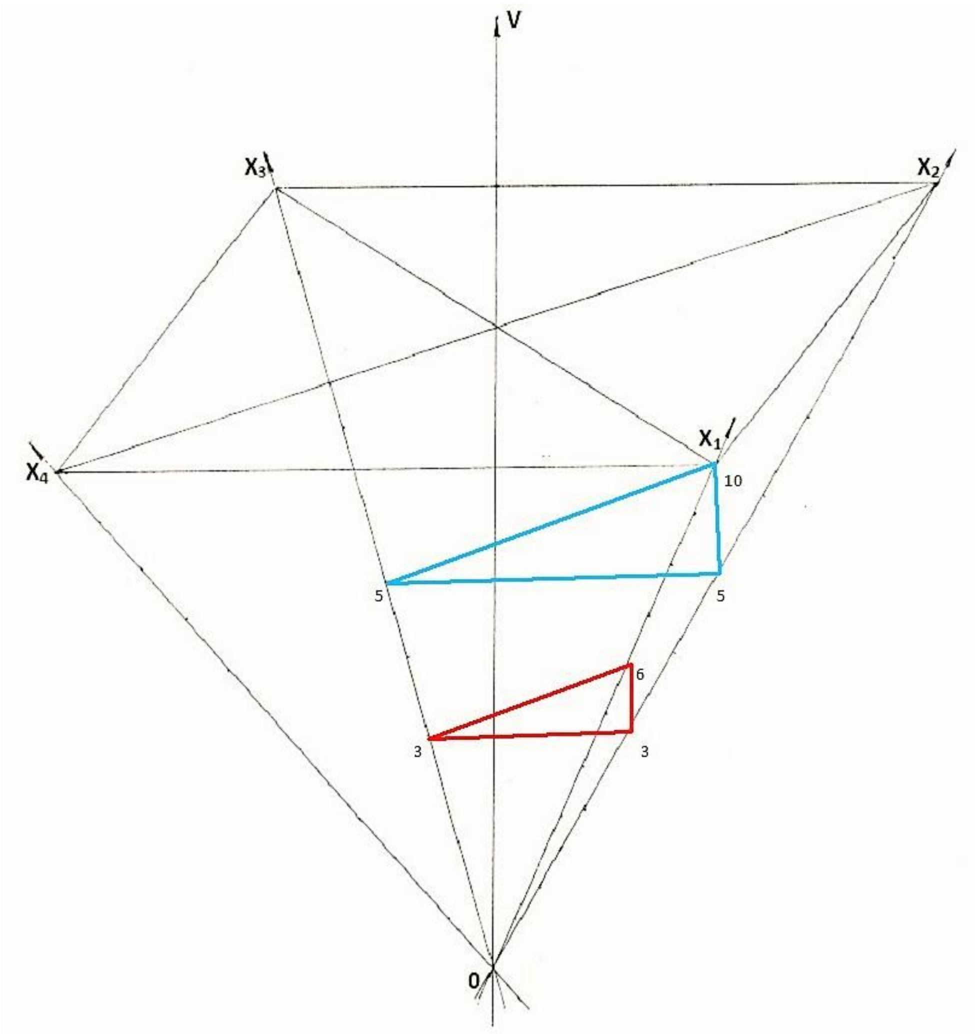

Рис.9

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 12, & \text{красный контур} \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10. & \text{синий контур} \end{cases}$$

Система несовместна, т.к. ни одна из стяжек, характеризующих соответствующее уравнение системы, как и сами плоскости, образуемые ими, не пересекаются.

Пример 9.** Решить систему из двух уравнений с четырьмя неизвестными в произвольно-угольной системе координат графическим методом (рис.10):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, & \text{красная прямая} \\ 3x_3 + 2x_4 = 6. & \text{зеленая прямая} \end{cases}$$

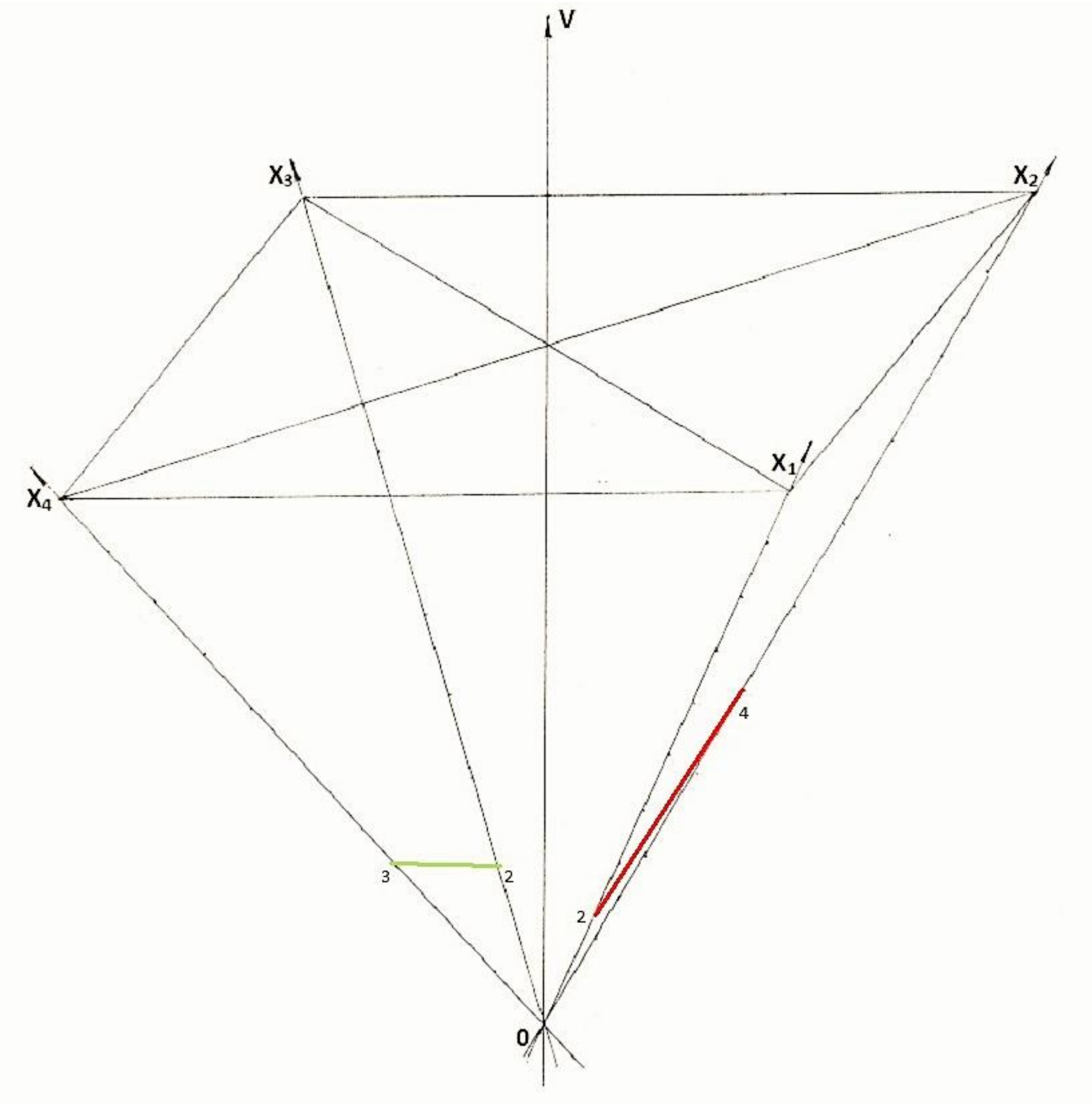

Рис.10

Система несовместна, т.к. стяжки, характеризующие уравнения системы, не пересекаются.

Пример 10. Решить систему из двух уравнений с четырьмя неизвестными в произвольно-угольной системе координат графическим методом:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 6, & \text{красный контур} \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -4. & \text{зеленый контур} \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений представлено на рисунке 11. Зеленый и красный контуры пересекаются по прямой $\boldsymbol{AB}$, координаты концевых ***(A, B)*** и промежуточных ***(C, D)*** точек которой являются частными решениями из их бесконечного множества на ней.

Ответы: $\boldsymbol{A}\,(0,\ -\frac{8}{5},\ \frac{22}{5},\ 0)$, $\boldsymbol{B}\,(0, 0, -2, 8)$, $\boldsymbol{C}\,(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{11}{2})$, $\boldsymbol{D}\,(0, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, 4)$.

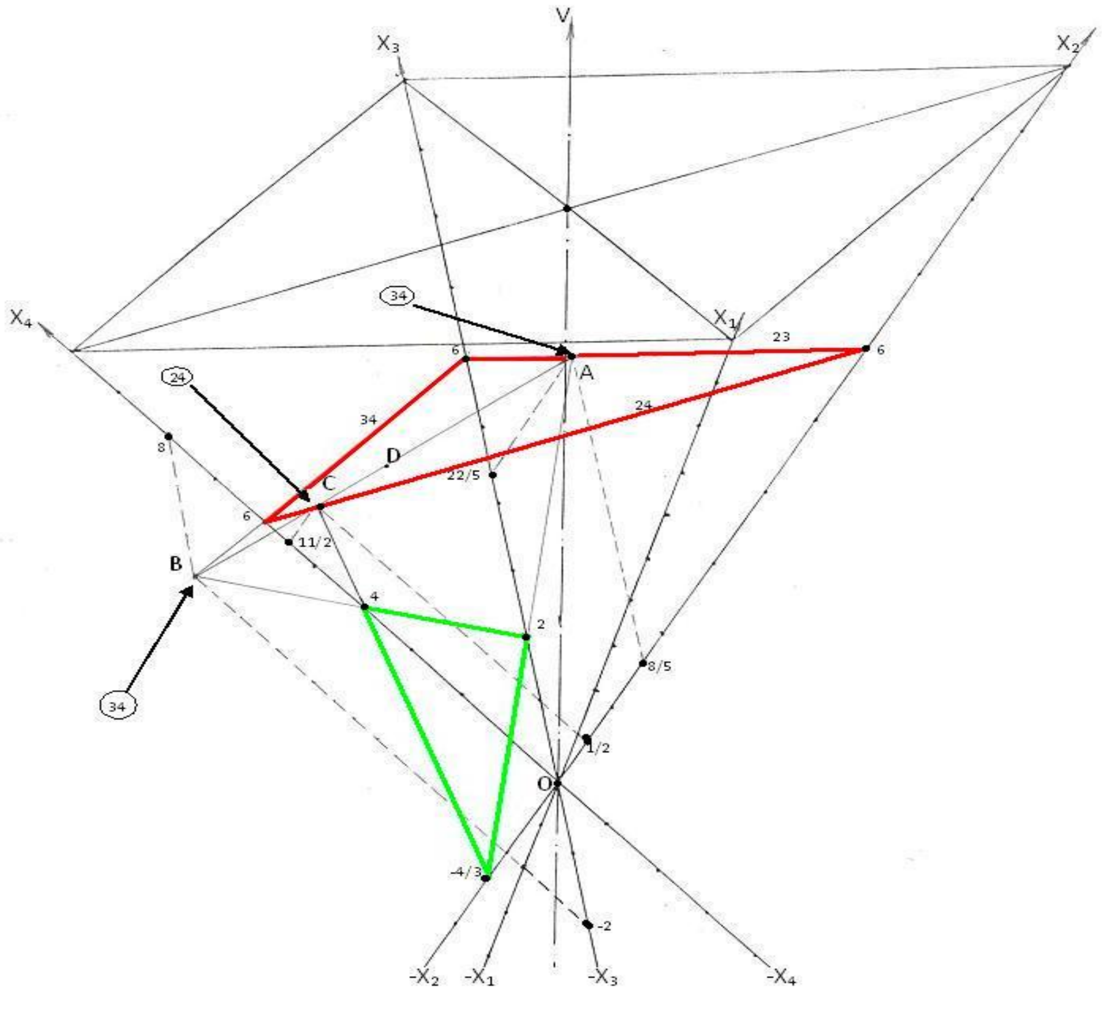

Рис.11

Пример 11. Решить систему из двух уравнений с четырьмя неизвестными в произвольно-угольной системе координат графическим методом (рис.12):

$$\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 + 1.25x_3 + \frac{10}{3}x_4 = 10, & \text{красный контур} \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5. & \text{зеленый контур} \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений представлено на рисунке 12. Зеленый контур пересекаются с красным по прямой AB, координаты концевых ***(A, B)*** и промежуточных ***(C, D)*** точек которой являются частными решениями из множества решений, представляемых координатами любой точки, лежащей на линии AB. Ответы:

A(5, 0, 0, 0), ***B***(0, -1, 0, 6), ***C***(2.5, -0.5, 0, 3), ***D***(3.75, -0.25, 0, 1.5).

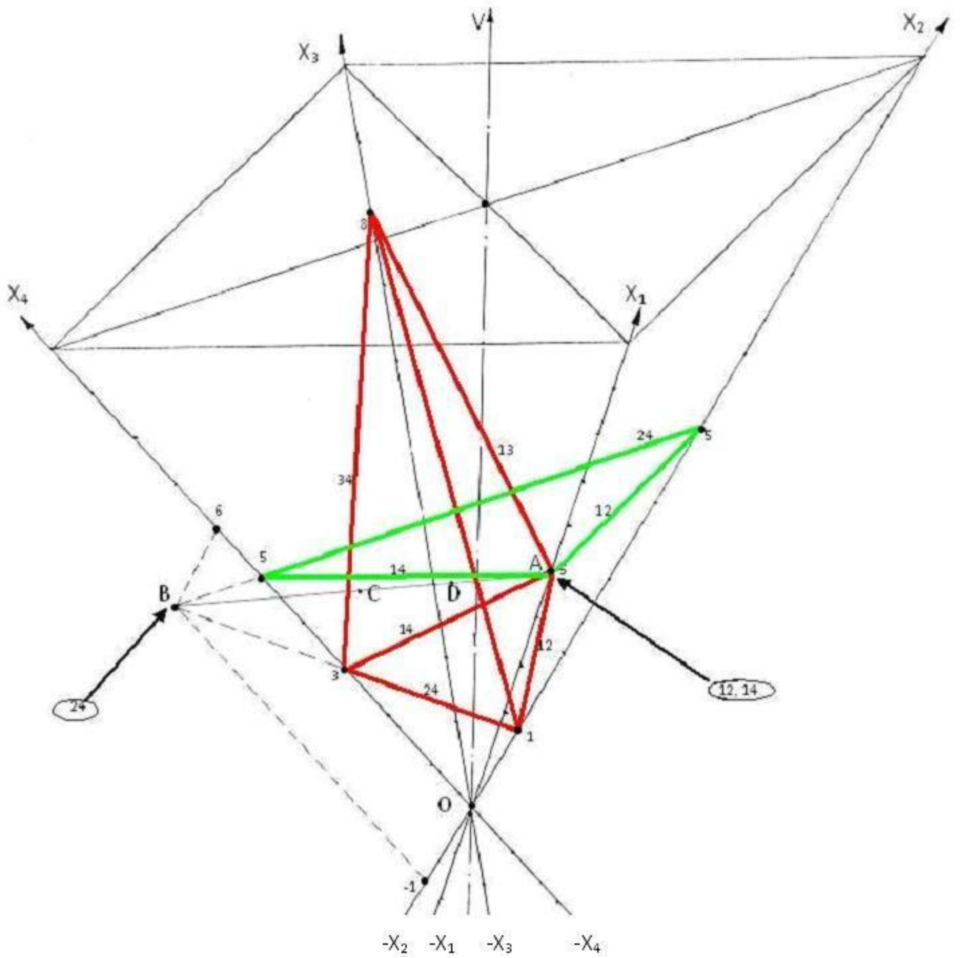

Рис.12

Пример 12. Решить систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными в произвольно-угольной системе координат графическим методом (рисунки 13-19):

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 + \frac{10}{3}x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений представлено на рисунках 13-19. На них представлены образы уравнений системы и разных уровней контакты между ними.

На рисунках обозначение ***k1***, к примеру, означает контур (образ) первого уравнения, ***k2, k3*** и ***k4*** – образы второго, третьего и четвертого уравнений; ***k12***, к примеру, означает контакт образов уравнений 1 и 2; так же следует понимать и обозначения других контактов; 12-13 в овале, к примеру, следует понимать как контакт контактов 12 и 13.

Из представленных образов всех уравнений в сочетании из четырех по два сведем в отдельные рисунки для показа их взаимного пересечения и построения 4-линейных трассовых фигур.

Комментарии к рисунку 13

- На рис.14 сведены в один рисунок образы уравнений 1 и 3 (***к1*** и ***к3***);
- Выявлены и поименованы перекрестки 12, 14, 23 и 34 (в кружочках);
- Объединены трассами группы разноименных перекрестков
  (12, 23 и образовавшийся при пересечении оси X_1 X_3 перекресток 13) – трасса 123,
  (12, 14 и образовавшийся при пересечении оси X_2 X_4 перекресток 24) – трасса 124,
  (14, 34 и образовавшийся при пересечении оси X_1 X_3 перекресток 13) – трасса 134,
  (34, 23 и образовавшийся при пересечении оси X_2 X_4 перекресток 24) – трасса 234,

т.е.
123 - (12, 13, 23),
134 - (13, 14, 34),
234 - (23, 24, 34),
124 - (12, 14, 24).

Трассы (в рамочках) поименованы по следующей методике:

(12, 13, 23) – 123, т.е., из этого имени путем перебора из трех по два всех его знаков вновь можно получить имена перекрестков трассы: 1-2, 1-3, 2-3 или (12, 13, 23). Эти четыре трассы объединены в одну трассовую фигуру (красный контур ***к13***, т.е. контур, образованный в результате пересечения образов первого и второго уравнений – ***к1*** и ***к3***).

Аналогичным образом осуществляется трассировка и на других рисунках.

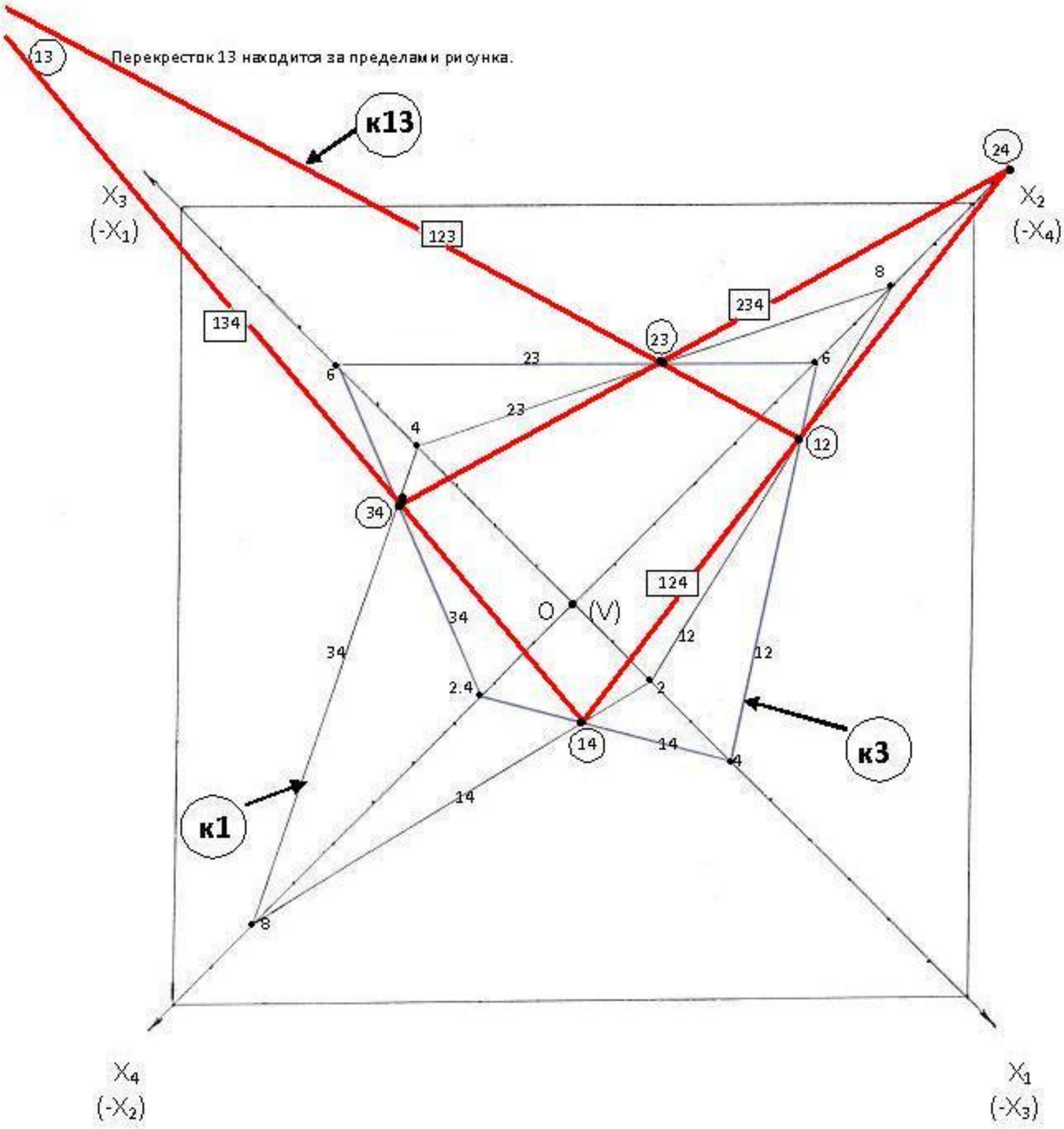

Рис.13

Контакт (***k13*** - красный контур) образов уравнений первого (***k1***) и третьего (***k3***)

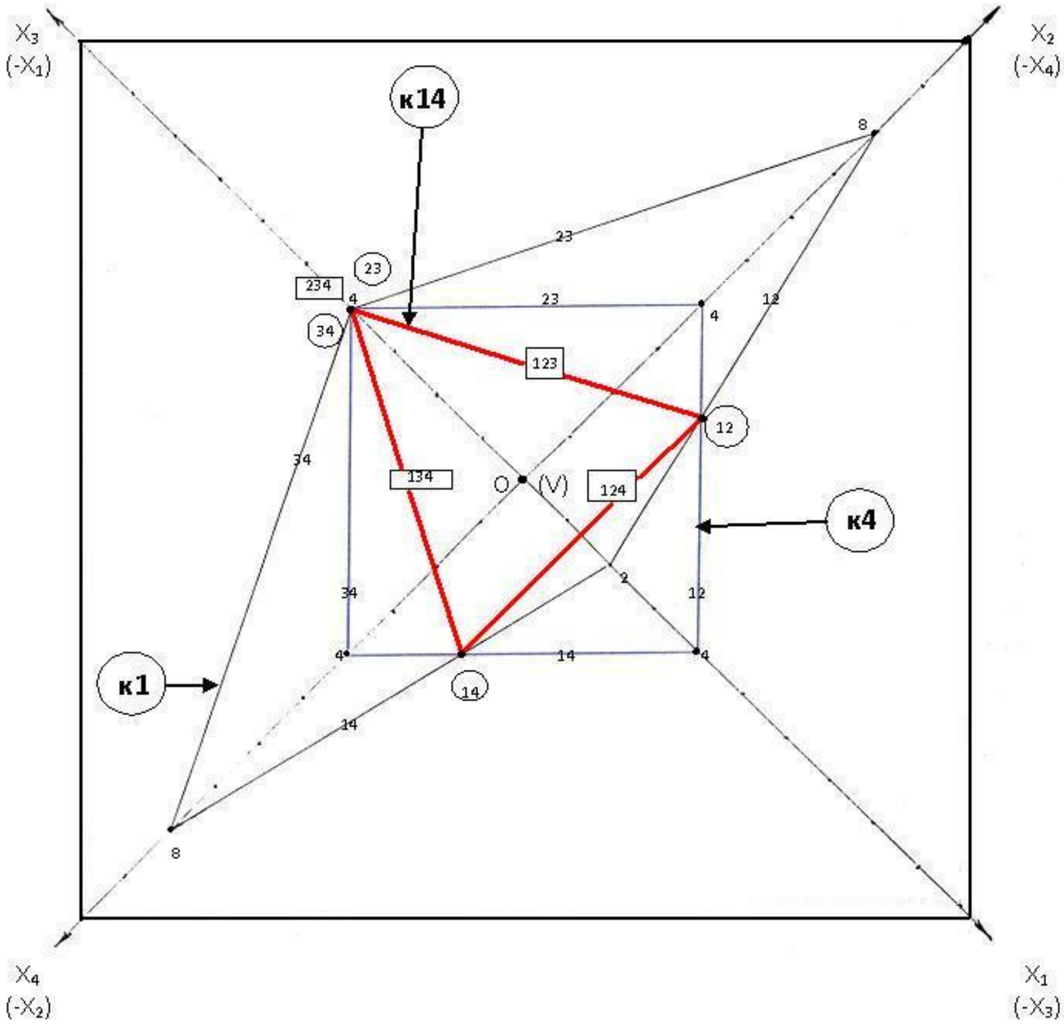

Рис.14

Контакт (***k14*** - красный контур) образов

уравнений первого (***k1***) и четвёртого (***k4***)

Полученные 4-линейные трассовые фигуры (выделены красным цветом) сведем в отдельные рисунки для показа их взаимного пересечения и построения гипертрасс. При этом имена гипертрасс складываются из имен пересекающихся 4-линейных трассовых фигур. Например, при пересечении 4-линейных трассовых фигур ***к13*** и ***к14*** образуется гипертрасса с именем 13-14 (рис.15).

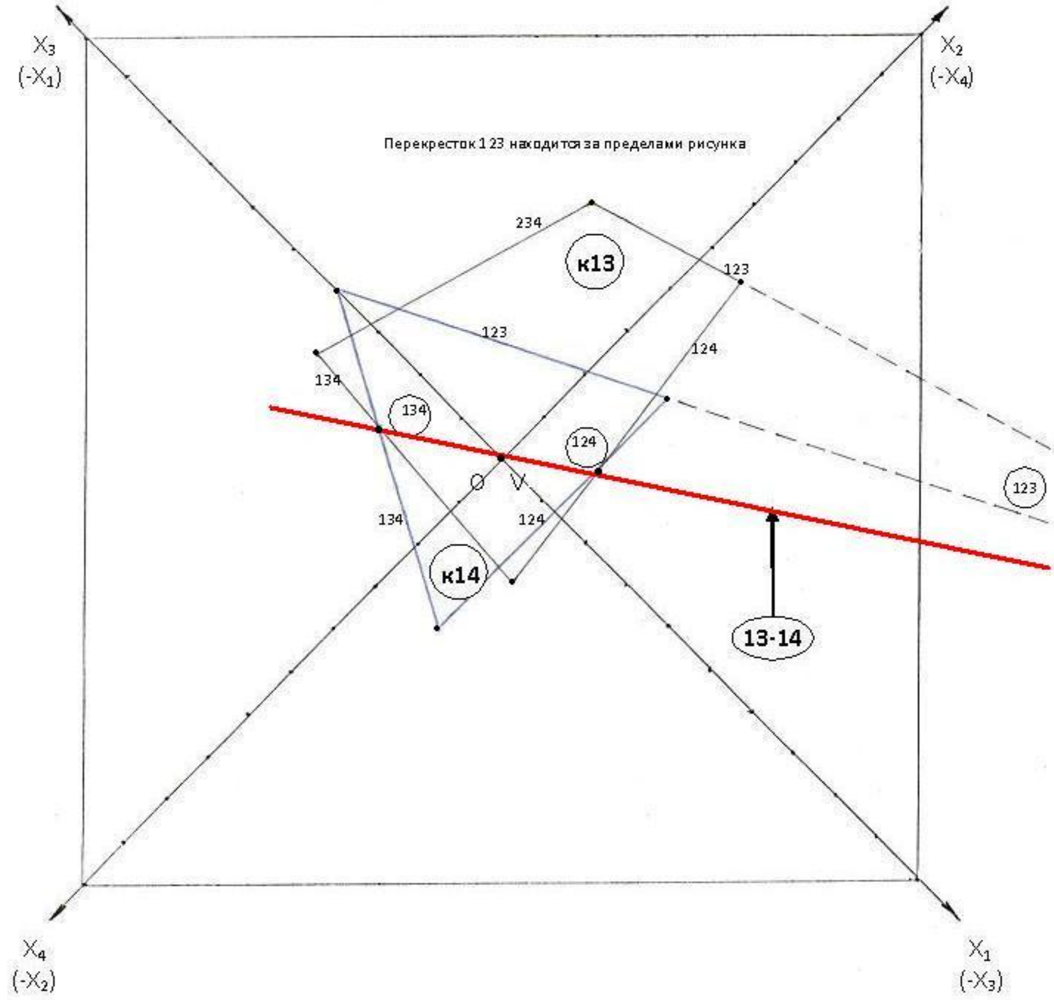

Рис.15

Контакт контактов ***k13*** и ***k14***

(***13-14*** - красная прямая)

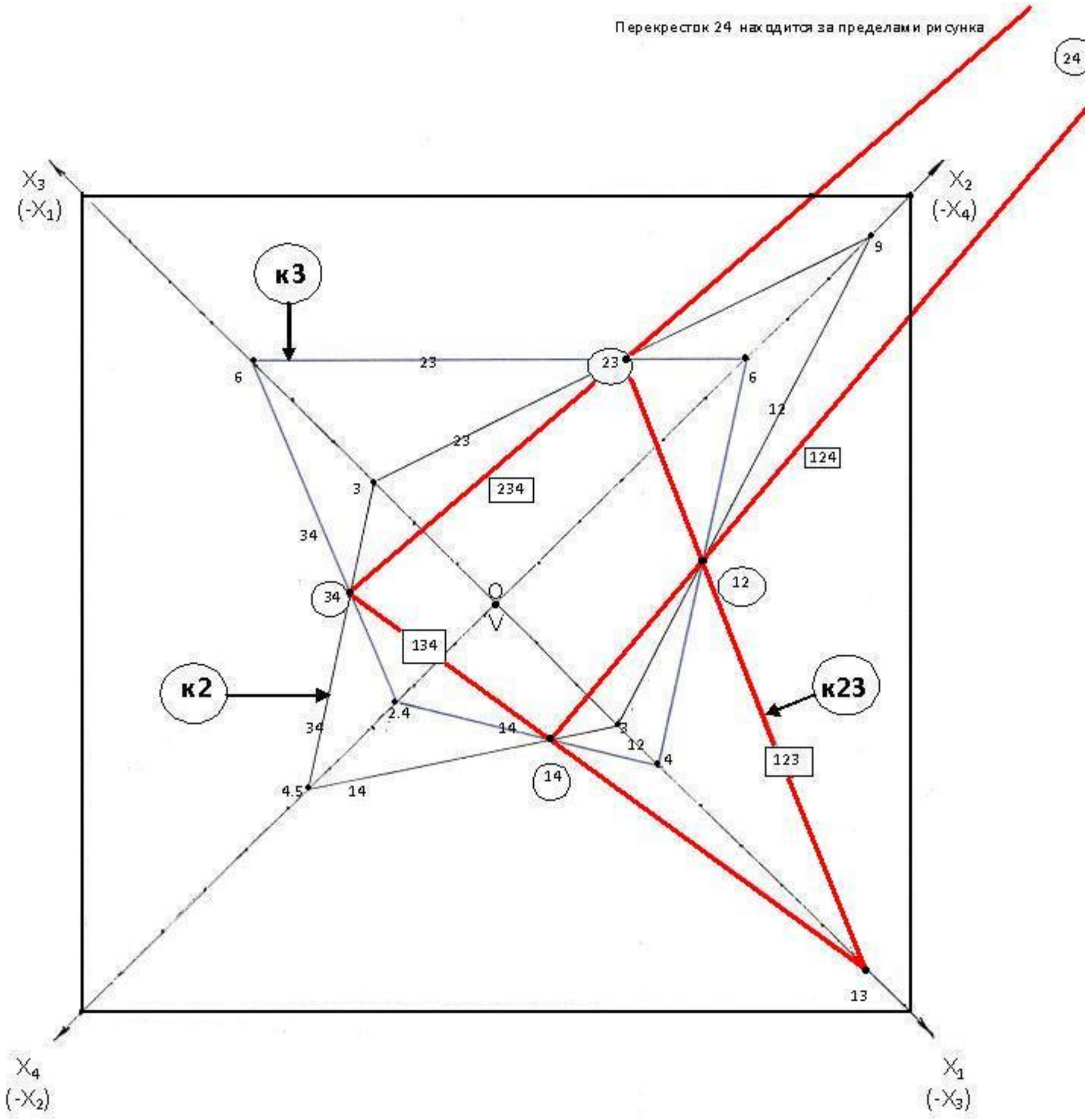

Рис.16

Контакт (***k23*** - красный контур) образов

уравнений второго (***k2***) и третьего (***k3***)

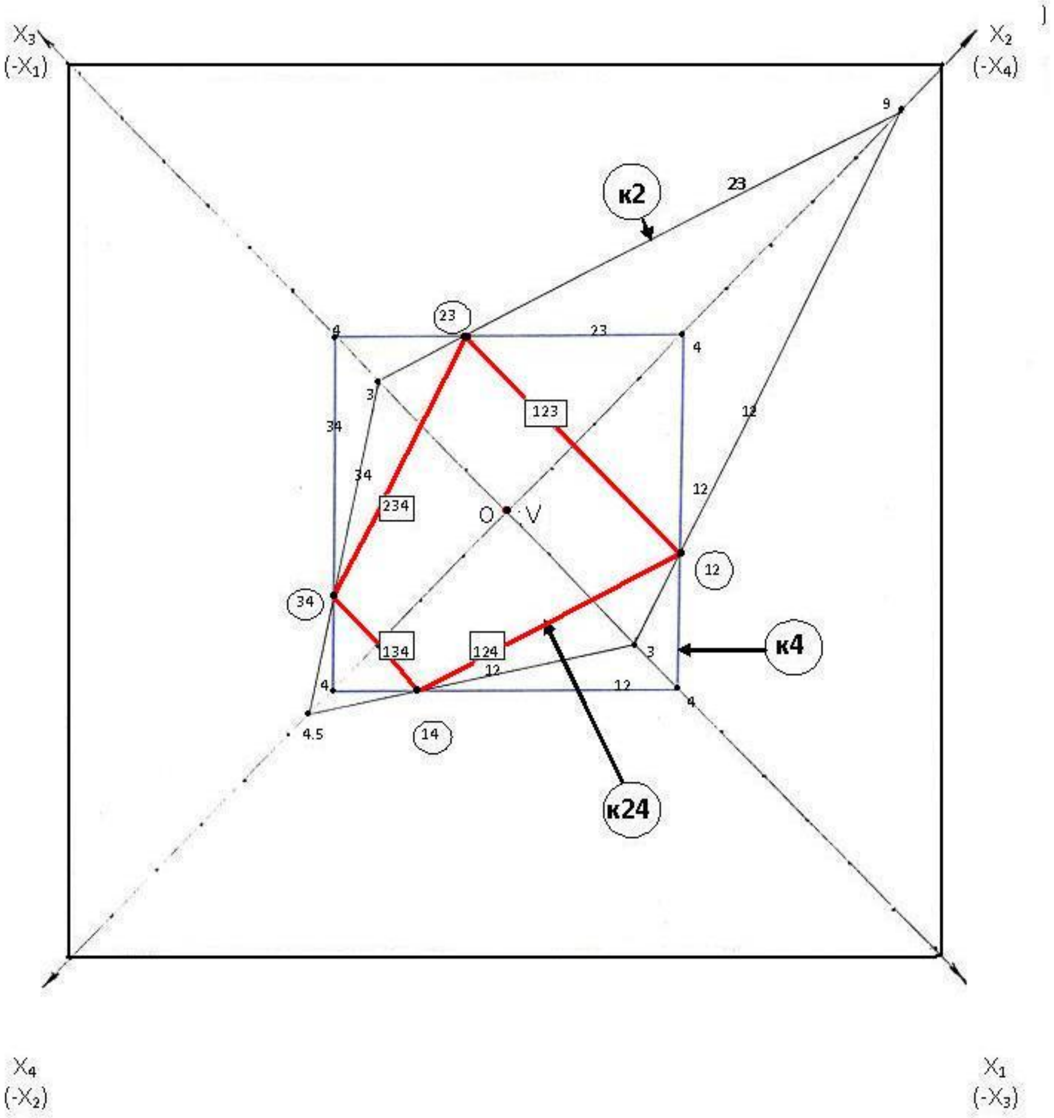

Рис.17

Контакт (***k24*** - красный контур) образов

уравнений второго (***k1***) и четвёртого (***k4***)

Полученные 4-линейные трассовые фигуры (выделены красным цветом) сведем в отдельные рисунки для показа их взаимного пересечения и построения гипертрасс. При этом имена гипертрасс складываются из имен пересекающихся 4-линейных трассовых фигур. Например, при пересечении 4-линейных трассовых фигур ***к23*** и ***к24*** образуется гипертрасса с именем 23-24 (рис.18).

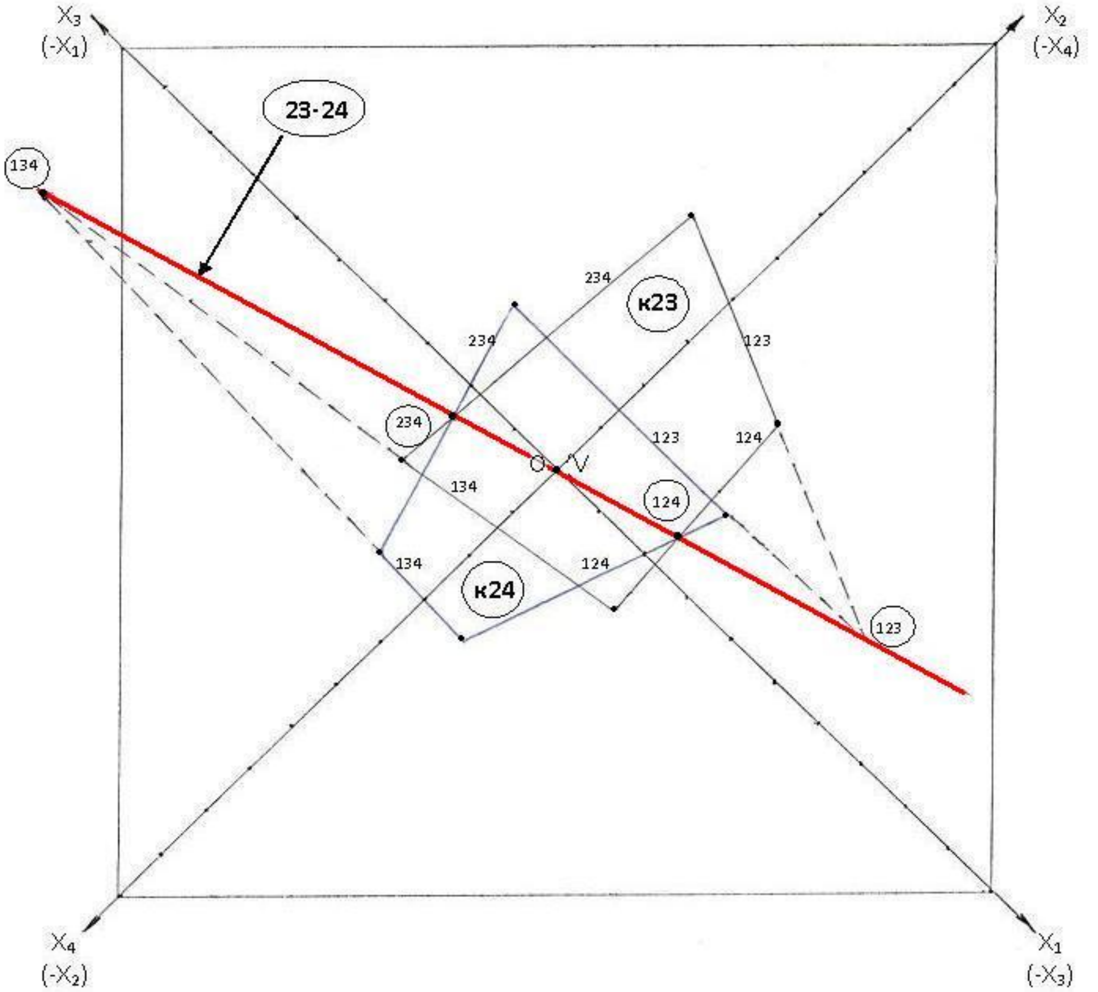

Рис.18

Контакт контактов ***k23*** и ***k24***

(***23-24*** - красная прямая)

Рисунки 15 и 18 показывают, что гипертрассы 13-14 и 23-24 пересекаются в точке начала координат, т.е. в т. ***O***, и поэтому, пересекаясь при взаимодействии, дадут точку ***A***, также лежащую на векторе ***V***. Но в таком случае ее координаты равны между собой. Но по условиям задачи, т.е. в соответствии с четвертым уравнением системы уравнений, это возможно лишь в случае, когда $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ и $x_4 = 1$.

Кроме того, т. ***A*** (рис.19) находится в плоскости образа 4-го уравнения, являющейся попутно плоскостью её привязки и потому в её пределах можно определить её координаты прямым действием (см. статью “Определение координат точки, находящейся в пространстве произвольно-угольной системы координат” на сайте автора **optiman.ucoz.ru**).

В обоих случаях получаем одинаковый ответ: $\boldsymbol{A}(1, 1, 1, 1)$.

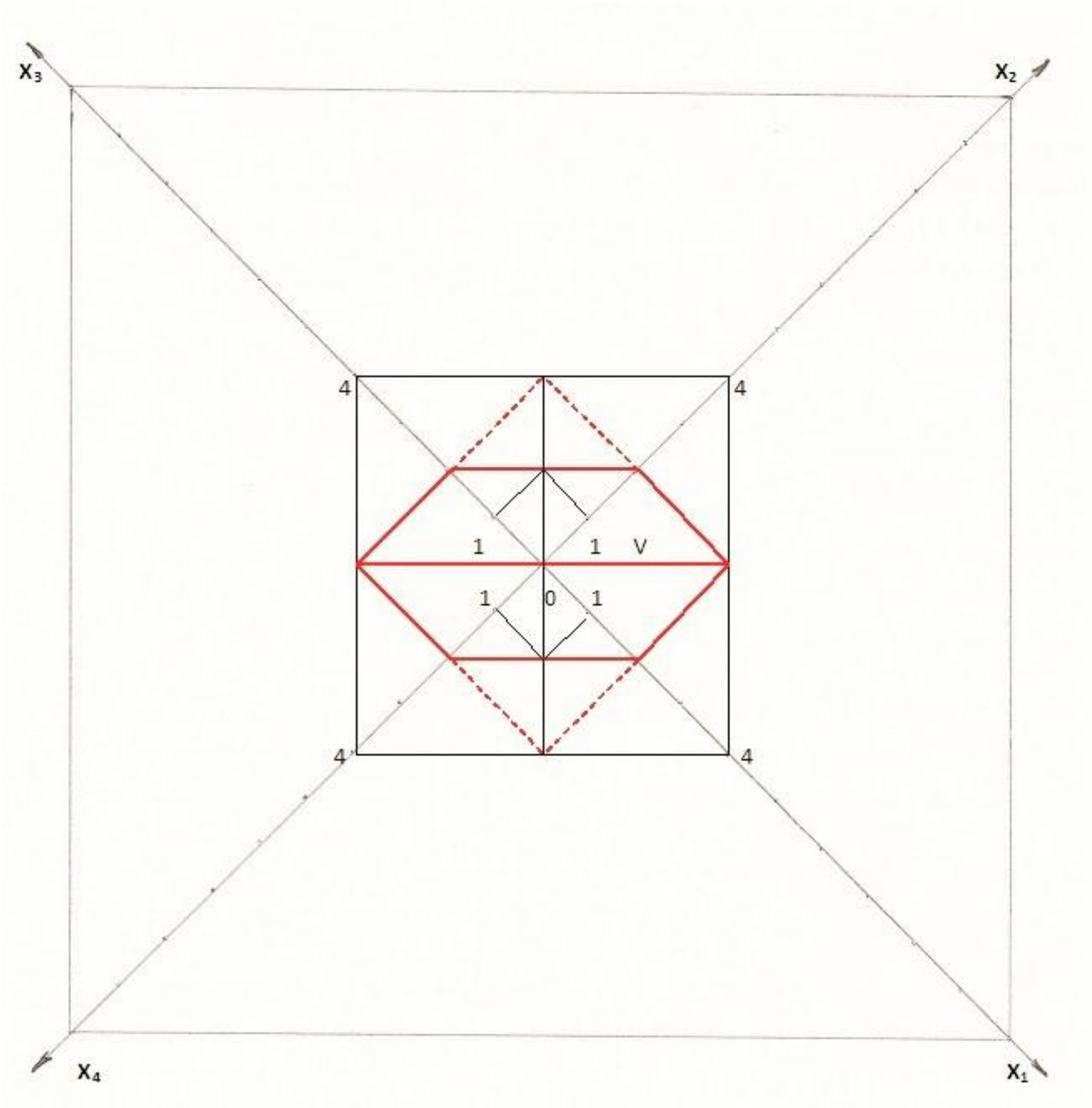

Рис.19

Найденные координаты точки $\boldsymbol{A}$ и являются решением заданной системы уравнений. Проверку правильности решения автор опускает.

Решение систем алгебраических уравнений графическим методом с помощью пятимерной произвольно-угольной системы координат

Пример 13. Решить систему из двух уравнений с пятью неизвестными, с помощью произвольно-угольной системы координат графическим методом:

$$\begin{cases} 2x_2 + \frac{30}{19}x_4 = 15, & \text{красная прямая} \\ x_1 + \frac{7}{9}x_3 + \frac{7}{8}x_5 = 7, & \text{зеленый контур} \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений графическим методом приведено на рисунке 20.

Прямая, лежащая в плоскости $\boldsymbol{X_2OX_4}$ **,** своим отрезком $\boldsymbol{AB}$ лежит и в плоскости зеленого контура. Точка $\boldsymbol{A}$ при этом находится на пресечении плоскостей $\boldsymbol{X_3OX_5}$ и $\boldsymbol{X_2OX_4}$**,** т.е. на линии $\boldsymbol{CO}$, а точка $\boldsymbol{B}$ – на пересечении плоскостей $\boldsymbol{X_1OX_3}$ и $\boldsymbol{X_2OX_4}$**,** т.е. на линии $\boldsymbol{DO}$. Координаты каждой точки прямой $\boldsymbol{AB}$ будут являться частным решением среди множества решений данной системы уравнений.

По рисунку определим координаты лишь точек $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{A}$ (0, 3, $\frac{11}{2}$, 5.7, $\frac{28}{9}$), $\boldsymbol{B}$ (3, 4.76, $\frac{36}{37}$, 3.47, 0).

Координаты показаны штриховыми линиями.

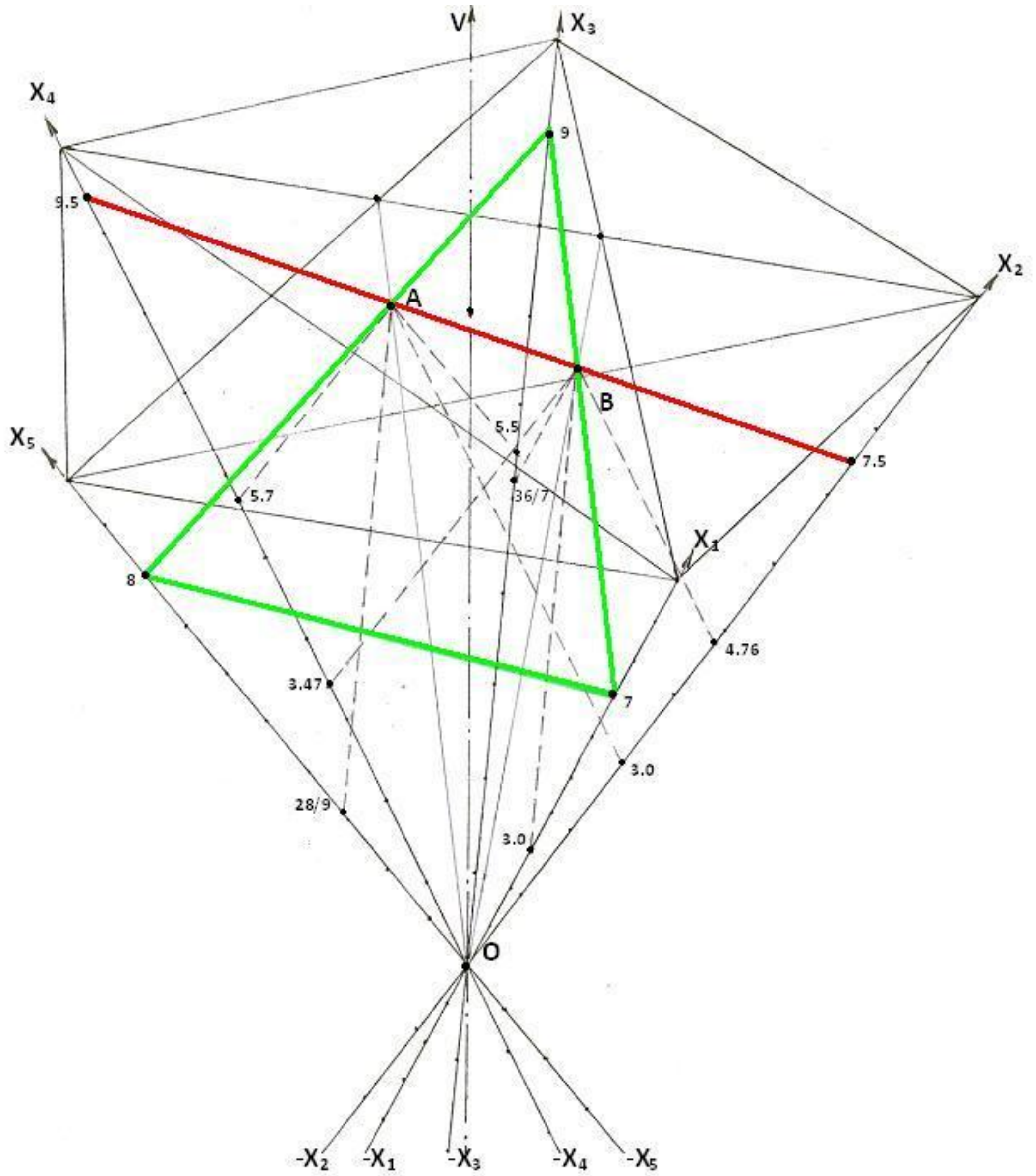

Рис.20

Пример 14.** Решить систему из двух уравнений с пятью неизвестными с помощью произвольно-угольной системы координат графическим методом:

$$\begin{cases} 5x_3 + 6x_4 = 30, & \text{красная прямая} \\ 7x_2 + 6x_3 = 42. & \text{зеленая прямая} \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений графическим методом приведено на рисунке 21. Прямые, принадлежащие: одна - плоскости $\boldsymbol{X_2OX_3}$, другая – плоскости $\boldsymbol{X_3OX_4}$, не пересекаются. Поэтому решение данной системы уравнений считается несовместным.

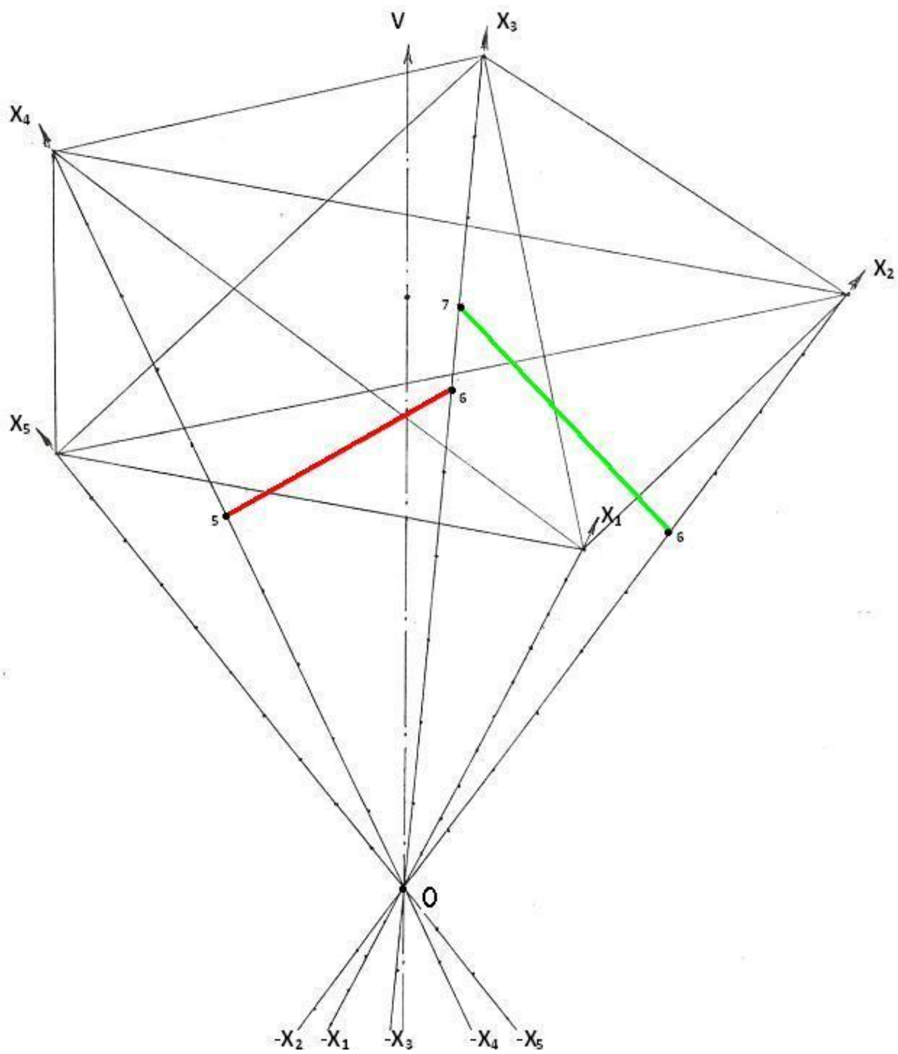

Рис.21

Пример 15. Решить систему из двух уравнений с пятью неизвестными с помощью произвольно-угольной системы координат графическим методом:

$$\begin{cases} 4x_3 + 3x_5 = 12, & \text{красная прямая} \\ 9x_3 + 2x_5 = 18, & \text{зеленая прямая} \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений графическим методом приведено на рисунке 22. Две прямые лежат в плоскости $\boldsymbol{X_3OX_5}$ и пересекаются в точке $\boldsymbol{A}$, координаты которой обозначены штриховыми линиями. Значения этих координат и являются единственным решением данной системы уравнений.

$\boldsymbol{A}\,(0,\,0,\,\frac{30}{19}\,,\,0,\,\frac{36}{19}\,).$

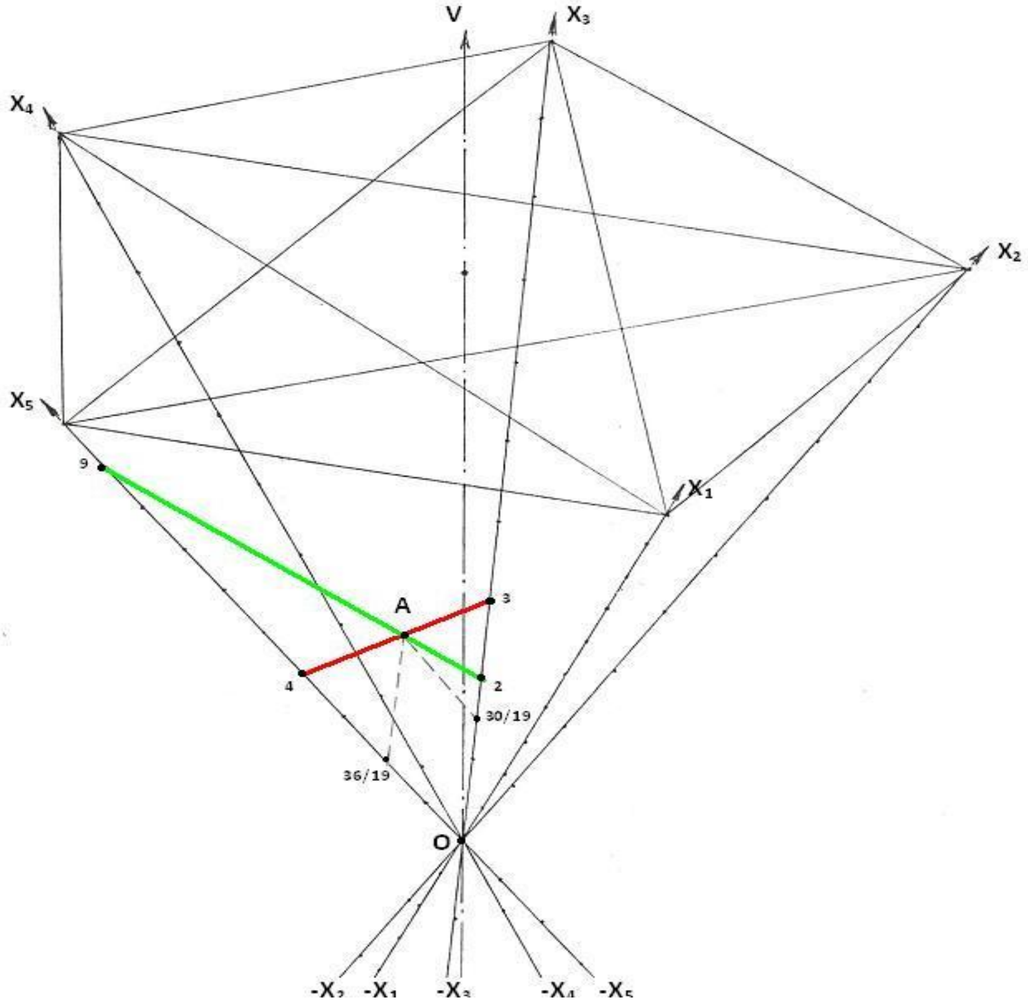

Рис.22

Пример 16*. Решить систему из двух уравнений с пятью неизвестными в произвольно-угольной системе координат графическим методом:

$$\begin{cases} 2x_2 + \frac{15}{9}x_3 + \frac{10}{3}x_5 = 15, & \text{красный контур} \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 16. & \text{зеленый контур} \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений графическим методом приведено на рисунке 23.

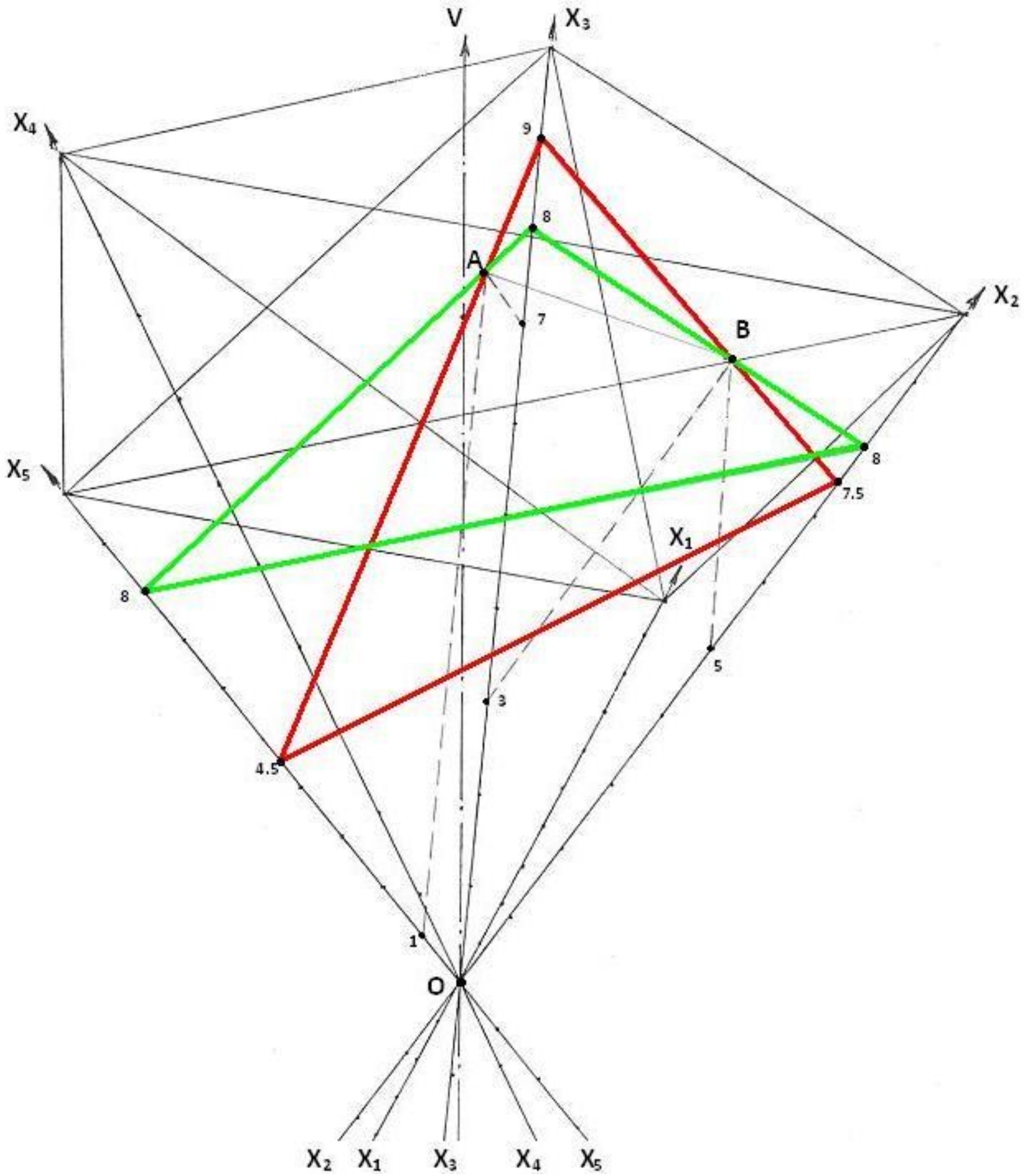

Рис.23

Красный и зеленый контуры пересекаются по линии $\boldsymbol{AB}$, каждая точка которой является одним из частных решений из множества решений, представленных этой прямой. По рисунку определим лишь координаты ее крайних точек, точек $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{A}$ (0, 0, 7, 0, 1), $\boldsymbol{B}$ (0, 5, 3, 0, 0).

Координаты показаны штриховыми линиями.

Решение систем алгебраических линейных уравнений графическим методом в шестимерной произвольно-угольной системе координат

Пример 17*. Решить систему из двух уравнений с шестью неизвестными с помощью произвольно-угольной системы координат графическим методом:

$$\begin{cases} 5x_2 + 2x_3 = 10, & \text{зеленая прямая} \\ 5x_1 + 2x_6 = 10. & \text{красная прямая} \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений графическим методом приведено на рисунке 24. Линии (зеленая и красная) – образы первого и второго уравнений в плоскостях $\boldsymbol{X_2OX_3}$ и $\boldsymbol{X_1OX_6}$ соответственно пересекаются в точке $\boldsymbol{A}$**,** координаты которой будут являться единственным решением данной системы уравнений.

Из рисунка определяем координаты - $\boldsymbol{A}$ (2.6, 2.6, -1.5, 0, 0, -1.5). В плоскости $\boldsymbol{X_2OX_3}$ координаты показаны штриховыми линиями, в плоскости $\boldsymbol{X_1OX_6}$ - штрихпунктирными.

Они являются частным решением системы уравнений.

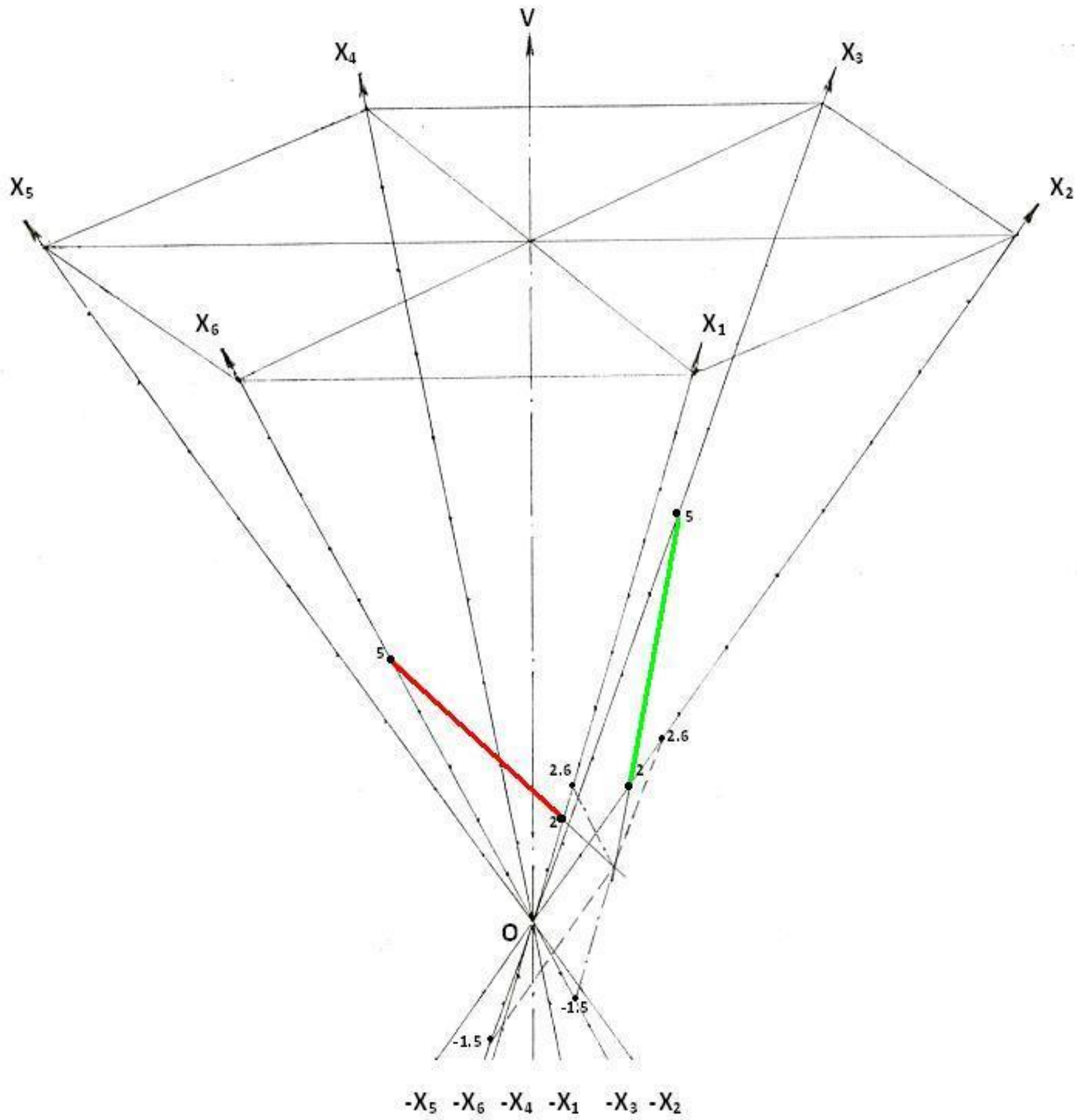

Рис.24

Пример 18*. Решить систему из трех уравнений с шестью неизвестными с помощью произвольно-угольной системы координат графическим методом (рис.25):

$$\begin{cases} 5x_1 + \frac{35}{9}x_4 = 20, & \text{красная прямая} \\ 2x_2 + 2x_5 = 9, & \text{зеленая прямая} \\ 2x_3 + 6x_6 = 18. & \text{синяя прямая} \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений графическим методом приведено на рисунке 25.

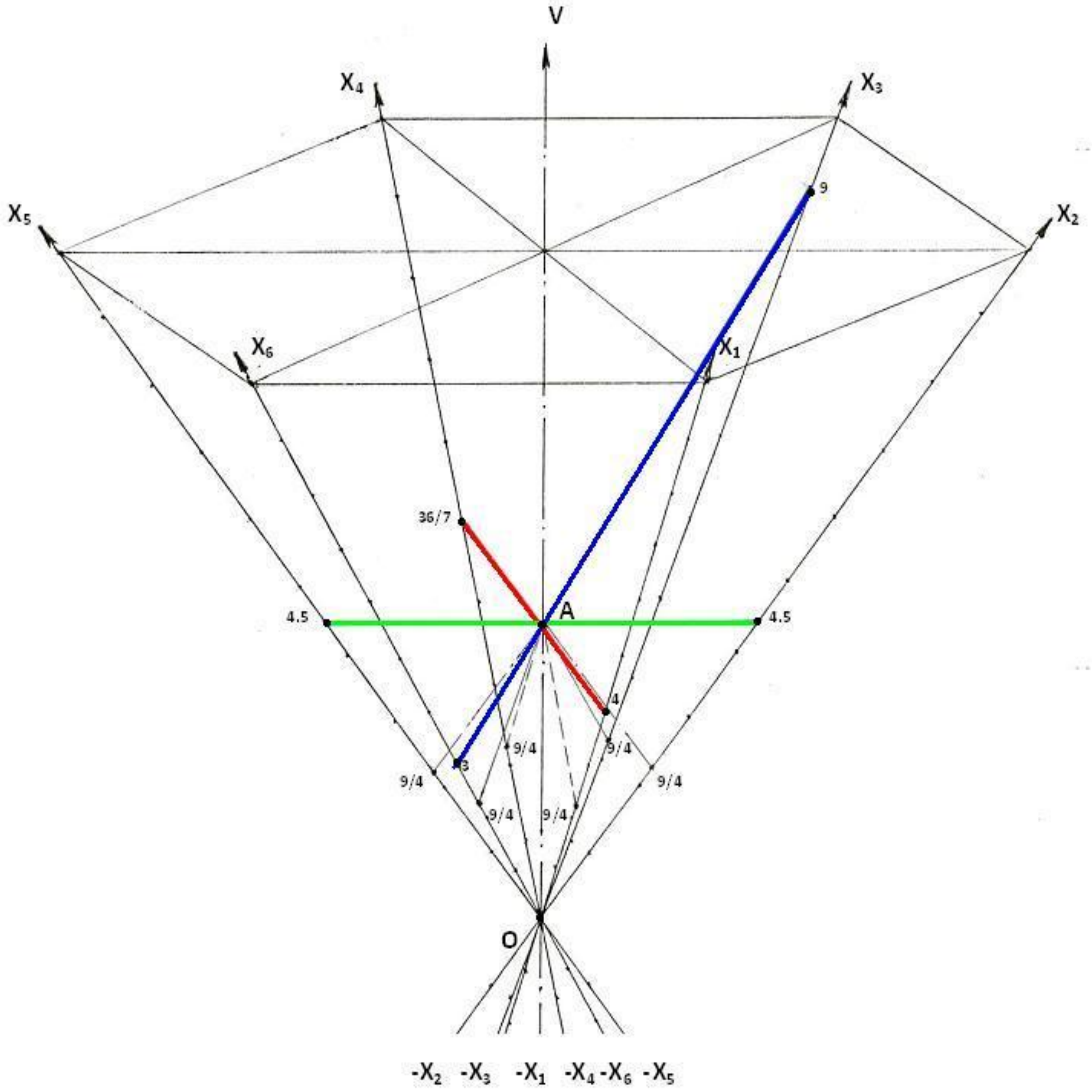

Рис.25

Линии (красная, зеленая и синяя) – образы первого, второго и третьего уравнений в плоскостях X_1OX_4, X_2OX_5 и X_3OX_6 соответственно- пересекаются в точке ***A***, координаты которой будут являться единственным решением данной системы уравнений. Из рисунка определяем координаты –

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}, \frac{9}{4}, \frac{9}{4}, \frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right).$$

Координаты показаны штриховыми линиями. Они и являются решением системы уравнений.

Заключение

Можно было бы продолжить рассмотрение многомерности на примерах 7-ми, 8-ми, 9-ти, и т.д. – мерности произвольно-угольной многомерной системы координат. Но с каждым повышением размерности начертание рисунков усложняется. Усложняется изготовление макетов, значительно усложняется абстрактное проникновение в суть задачи.

Правда, и по этим уже рассмотренным пяти (2-х, 3-х, 4-х, 5-ти и 6-ти) размерностям прослеживается определённая закономерность, которую можно распространить и на произвольно-угольную многомерную систему координат большей размерности. Может быть, когда-то найдётся пытливый последователь, опытный программист, который на основе этой работы создаст программу, с помощью которой, задав определённые параметры систем координат любой размерности, не только сможет в режиме 3D (или – 4D) отображать её во вращении на экране, но и решать математические задачи большей сложности и большей актуальности уже не с помощью рисунков, изобилие которых читатель успел прочувствовать на себе, но и с помощью вычислительной техники. В частности, остается открытым вопрос математического (формульного) доказательства (а может оказаться, что – опровержения) всего вышесказанного, а особенно – доказать, что решением “полнокровной” системы уравнений в пространстве многомерной произвольно-угольной системы координат является точка, общая для образов всех уравнений, входящих в систему!

Глоссарий

Ранг произвольно-угольной системы координат – количество координатных осей (или плоскостей) в системе координат;

Вектор направленности V – проходящая через начало координат прямая линия, каждая точка которой находится на равном расстоянии от каждой координатной плоскости;

Ограничительная плоскость **–** плоскость, перпендикулярная вектору направленности и служащая для устойчивого зрительного восприятия изображенной на рисунке системы координат; в рисунках часто используется как плоскость привязки какой-либо точки или прямой.

Координатная точка – точка на плоскости или в пространстве системы координат, положение которой необходимо определить;

Стяжка – прямая, соединяющая (стягивающая) две оси координат;

Имя стяжки – двузначная цифра, каждая из которых представляет собой номера осей координат, стягиваемых данной стяжкой. Причем первая из них всегда наименьшая, и представляет собой номер оси координат с наименьшим номером;

Перекресток – применительно к системе координат это точка пересечения двух одноименных стяжек; применительно к матрице это элемент матрицы, являющийся общим как для строки, так и для колонки, которым он принадлежит;

Имя перекрестка – имя точки пересечения одноименных стяжек или их продолжений в пространстве, совпадающее с именем самих стяжек;

Образ уравнения – графическая интерпретация уравнения;

Контакт – результат графического взаимодействия двух разноименных образов уравнений или двух разноименных контактов и представляющий собой точку, прямую или замкнутый контур, составленный из определенного количества прямых;

Имя контакта – имена контактов в зависимости от уровня процесса решения могут иметь имена в виде двух цифр, разделенных пробелом и представляющих собой порядковые номера уравнений; двух контактов предыдущего уровня, разделенных пробелом; двух пар цифр, разделенных пробелом и представляющих собой имена контактов предыдущего уровня; двух четверок имен контактов предыдущего уровня, разделенных пробелом; и т.д.

Контактируемый контакт – контакт более высокого уровня, полученный как контакт контактов предыдущего, более низкого, уровня;

Контур – чаще всего это замкнутая фигура, состоящая из совокупности прямых на плоскости; вырожденный контур может принимать вид незамкнутой фигуры, прямой линии или просто точки;

Трасса – прямая линия, проходящая через несколько разноименных перекрестков;

Конец статьи