

Атом Водорода

Экзотические состояния. Часть вторая

2016г.

Дангян А.Э. araik_d@hotmail.com

Ключевые слова: Квантовая механика, водород, релятивистское уравнение, уравнение Дирака, уравнение Клейна-Гордона, СТО (Специальная Теория Относительности), изоэлектронный ряд водорода, водород с нулевой валентностью, EDO (Electron Deep Orbits), Deep Dirac Levels (DDLs).

Введение

При изучении атома водорода, с целью выявления всех тонкостей поведения электрона, одним из главных условий является применение правильных, адекватных уравнений. До последнего времени, для этого применялись уравнения Шредингера, Клейна-Гордона и Дирака. Уравнение Шредингера анализировать не будем, так как оно не релятивистское и поэтому не может претендовать на полное и точное описание в диапазоне высоких энергий и скоростей.

Далее будет показано, что и уравнение Клейна-Гордона тоже неприемлемо, по причине допущенной, глубоко замаскированной ошибки, при выводе этого уравнения.

Поскольку, в связи с поставленной целью, мы будем анализировать поведение электрона в состояниях с энергией ниже основного состояния, то будет показано, что в этой области к результатам решений уравнения Дирака тоже нужно относиться с неким подозрением.

В итоге, единственным приемлемым уравнением остается уравнение M2 [1].

Анализ уравнений квантовой механики

В работе [1] приведен краткий вывод стационарного уравнения Клейна-Гордона (УКГ). Ключевой особенностью уравнения Клейна-Гордона является то обстоятельство, что оно отражает, в форме дифференциального уравнения, соотношение энергии и импульса Специальной Теории Относительности (СТО) $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ (1.1)

Далее в работе [1] приводится аналитическое решение УКГ для изоэлектронного ряда водорода в основном состоянии. В результате решения получена формула для энергии основного состояния в следующем виде:

$$E_0(Z) = 27.2 * \left[\frac{\sqrt{c^4 + c^4 \frac{c^2 - 4Z^2}{c^2}}}{\sqrt{2}} - c^2 \right] \text{ эВ} \quad (1.2) \quad \text{Сравнительный анализ полученных решений}$$

с экспериментальными данными показал, что по мере увеличения заряда ядра Z отклонения сильно увеличиваются. Посмотрев на формулу (1.2) можно заметить, что под квадратным корнем находится выражение: $\frac{c^2 - 4Z^2}{c^2}$ Следовательно можно записать $\frac{c^2 - 4Z^2}{c^2} \geq 0$ откуда

следует неравенство $Z \leq \frac{c}{2}$ (1.3) где $Z \in [1 \div 137]$ заряд ядра водородоподобного иона, $c = 137.03599971$ скорость света в атомных единицах Хартри. Следовательно из неравенства (1.3) получим $Z \leq 68$. А это означает, что при превышении заряда ядра $Z > 68$ решения УКГ срываются и под квадратным корнем получается отрицательное значение.

Приведенный расчет доказывает ошибочность уравнения Клейна-Гордона, так как такая ситуация должна была случиться при $Z > 137$ а не при $Z > 68$.

Теперь посмотрим по какой причине возникла данная ошибочная ситуация и к чему приведет устранение этой ошибки.

Когда при выводе уравнения Клейна-Гордона, в выражение связи энергии и импульса СТО

(1.1) подставляем выражение квадрата импульса через волновую функцию $p^2 = -\frac{\hbar^2}{\Psi} \Delta \Psi$ то

думаем, что получили релятивистский квадрат импульса. То есть думаем что $-\frac{\hbar^2}{\Psi} \Delta \Psi = \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

(вернее так думали Клейн и Гордон при выводе уравнения).

Но на самом деле, уравнение воспринимает выражение $p^2 = -\frac{\hbar^2}{\Psi} \Delta \Psi$ (1.4) как обычный

квадрат импульса $-\frac{\hbar^2}{\Psi} \Delta \Psi = m^2 v^2$

Почему так? Оставим этот вопрос глубоким теоретикам. А нас интересует практическая сторона вопроса. То есть устранение ошибки в уравнении Клейна-Гордона.

Одним словом, релятивистский квадрат импульса не определяется выражением

$p^2 = -\frac{\hbar^2}{\Psi} \Delta \Psi$. И поэтому получаем ошибочное уравнение Клейна-Гордона.

Теперь, если переписать выражение (1.1) в развернутом виде $E^2 - \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} c^2 = m^2 c^4$ и сделать

необходимые преобразования: $E^2 - \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{m^2 v^2}{m^2 c^2}} c^2 = m^2 c^4$ и подставить уже обычный квадрат

импульса $p^2 = m^2 v^2$ на свое место. То получим: $E^2 - \frac{p^2}{1 - \frac{p^2}{m^2 c^2}} c^2 = m^2 c^4$ (1.5). Переписав

выражение (1.5) в удобной форме получим: $m^2 c^2 - p^2 = \frac{m^4 c^6}{E^2}$ (1.6), что соответствует

выражению (2.5) в статье [“Новое уравнение релятивистской квантовой механики”](#) [1].

Таким образом, при правильном понимании выражения для квадрата импульса (1.4), вместо ошибочного уравнения Клейна-Гордона, получаем правильное уравнение М2.

$$\Delta \Psi - \frac{1}{\hbar^2} \left[\frac{m^4 c^6}{(E - U(r))^2} - m^2 c^2 \right] \Psi = 0 \quad (1.7)$$

Замечания по поводу уравнения Дирака приведем позже, при сравнении решений с решениями уравнения М2.

Радиальное уравнение М2 для атома водорода

В работе [2] достаточно подробно было приведено решение угловой части уравнения М2. Поэтому сразу перейдем к решению радиального уравнения. Для нас важно, что квантовое

число l может принимать как целые так и полуцелые значения, включая значение $l = -\frac{1}{2}$
 $l = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$. Обоснование есть в работах [2] и [4]. Особый случай $l = -\frac{1}{2}$ будем рассматривать отдельно.

Запишем радиальное уравнение М2 для водородоподобных ионов с зарядом ядра Z :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R - \frac{1}{\hbar^2} \left[\frac{m^4 c^6}{\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2} - m^2 c^2 \right] R = 0 \quad (2.1)$$

Далее будем применять атомную систему единиц Хартри.
 $a_0 = 1, m = 1, e = 1, \hbar = 1, c = 137.03599971, 4\pi\epsilon_0 = 1$.

Перепишем уравнение (1.1) в атомных единицах Хартри:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R - \left[\frac{c^6}{\left(E + \frac{Z}{r} \right)^2} - c^2 \right] R = 0 \quad (2.2)$$

Для решения полученного уравнения, воспользуемся математическим интернет ресурсом **WolframAlpha** <http://www.wolframalpha.com/>

Решение уравнения (2.2) представляет из себя сумму двух линейно независимых частей. Обобщенных полиномов Лагерра и вырожденной гипергеометрической функции второго рода.

Воспользуемся вторым линейно-независимым решением. Который имеет вид:

$$R(r) = \frac{1}{r} k_1 \exp\left(-\frac{r\sqrt{c^6 - E^2 c^2}}{E}\right) (Er + Z)^{\frac{1}{2}} \sqrt{4L + \frac{4Z^2 c^6}{E^4} + 1}^{\frac{1}{2}} \text{HypergeometricU} \left(\frac{\left(\sqrt{4L + \frac{4Z^2 c^6}{E^4} + 1} \right) E^4 - c^4 \left(\sqrt{4L + \frac{4Z^2 c^6}{E^4} + 1} \right) E^2 + 2Zc^4 \sqrt{c^6 - E^2 c^2}}{2E^2 (E^2 - c^4)}, \sqrt{4L + \frac{4Z^2 c^6}{E^4} + 1}, \frac{2\sqrt{c^6 - E^2 c^2} (Er + Z)}{E^2} \right)$$

где HypergeometricU вырожденная гипергеометрическая функция второго рода, k_1 константа интегрирования. $L = l(l+1)$ где l орбитальное квантовое число.

Как известно, первый параметр вырожденной гипергеометрической функции является радиальным квантовым числом со знаком минус $-n_{rad}$.

Из этих соображений, получаем уравнение для определения энергии основного состояния и возбужденных состояний водородоподобных ионов в следующем виде:

$$\left(\frac{\left(\sqrt{4L + \frac{4Z^2 c^6}{E^4} + 1} \right) E^4 - c^4 \left(\sqrt{4L + \frac{4Z^2 c^6}{E^4} + 1} \right) E^2 + 2Zc^4 \sqrt{c^6 - E^2 c^2}}{2E^2 (E^2 - c^4)} \right) = -n_{rad} \quad (2.3)$$

Сначала найдем решения уравнения М2 для обычных водородных состояний. Решая уравнение (2.3) с параметрами $n_{rad} = 0$ и $l = 0$ получим формулу энергий основного состояния водородоподобных ионов в атомных единицах Хартри в следующем виде:

$$E_0(Z) = \sqrt{c^4 - c^2 Z^2} \quad (2.4) \text{ Полученная энергия включает в себя энергию покоя электрона } mc^2.$$

Учитывая это окончательно запишем формулу энергии в электрон-вольтах.

$$E_0(Z) = 27.2 * \left(\sqrt{c^4 - c^2 Z^2} - c^2 \right) \text{эВ} \quad (2.5) \text{ Полученная формула энергии основного состояния}$$

водородоподобного ряда, точно совпадает с соответствующей формулой Дирака.

Определим энергии атома водорода для основного состояния $l=0, n_{rad}=0$ и первого возбужденного состояния с орбитальным моментом $l=0, n_{rad}=1$.

Подставляя значения $Z=1, c=137.03599971$ в формулу (2.5) получим энергию основного состояния:

$$E_0(1) = 27.2 * \left(\sqrt{137.03599971^4 - 137.03599971^2} - 137.03599971^2 \right) = -13.6001810593938 \text{ эВ}$$

Решая уравнение (2.3) с параметрами $l=0, n_{rad}=1, Z=1, c=137.03599971$ получим энергию первого возбужденного состояния: $E_1(1) = 27.2 * (-0.124997088038) = -3.3999207946 \text{ эВ}$.

На основании полученных энергий, построим графики нормированной радиальной плотности вероятности для основного состояния и первого возбужденного состояния Рис.1.

Из уравнения (2.3) можно получить достаточно компактную универсальную формулу для расчета энергий водородоподобного ряда, в основном и в возбужденных состояниях, для уравнения M2, при условии равенства радиального и орбитального квантовых чисел: $n_{rad} = l = n$.

$$E = \pm \frac{c\sqrt{c^2 + 4c^2n + 4c^2n^2 - Z^2}}{\sqrt{1 + 4n + 4n^2}} \quad (2.6)$$

Квантовое число n принимает значения из ряда $n=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$ с шагом $\frac{1}{2}$. Имеются некоторые различия в интерпретации квантовых чисел уравнения Дирака и уравнения M2. На этом подробно останавливаться в рамках данной работы не будем. При значении квантового числа $n=0$ формула (2.6) переходит в формулу энергии основного состояния (2.4) как и следовало ожидать.

Будем пользоваться только положительными значениями энергий, хотя уравнение M2 дает симметричные решения. Решения по формуле (2.6) очень хорошо согласуются с экспериментальными значениями.

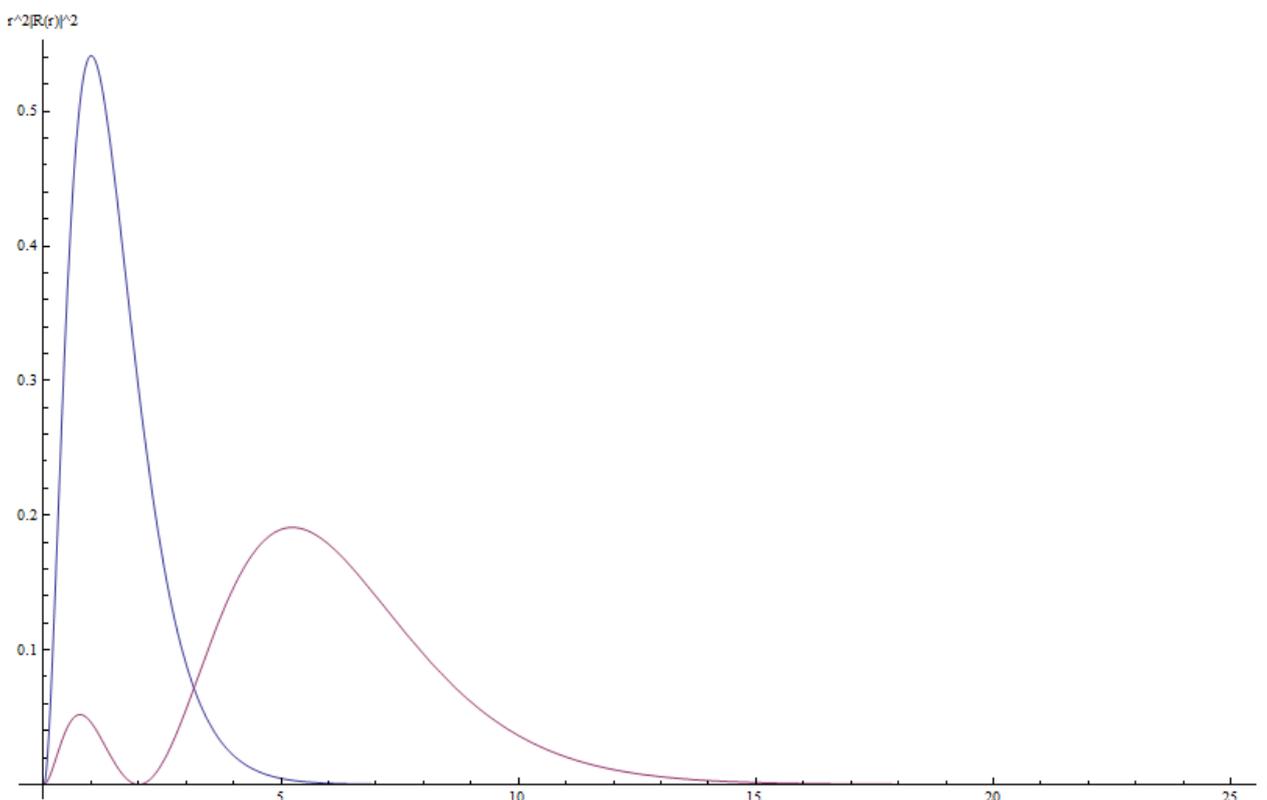


Рис.1 Нормированная радиальная плотность вероятности основного состояния и первого возбужденного состояния в атомных единицах Хартри.

Экзотические, сильно локализованные, компактные состояния водорода

Построим график зависимости энергии от радиального квантового числа для сферически симметричных состояний с орбитальным моментом $l=0$ согласно уравнению (2.3) Рис.2. На том же рисунке построим соответствующий график $l=0$ уравнения Дирака для сравнения. На графике точка 1 соответствует основному состоянию $l=0, n_{rad}=0$. Точка 2 соответствует первому возбужденному состоянию $l=0, n_{rad}=1$.

Как можно заметить, в области энергий выше основного состояния, то есть выше точки 1, решения уравнений Дирака и M2 точно совпадают. Это область обычных возбужденных состояний. Однако в области энергий ниже основного состояния, поведение уравнений в корне отличаются. В этой области уравнение M2 имеет характерный изгиб. В результате такого поведения образуется точка 3. Это точка пересечения графика энергии с линией $n_{rad} = -\frac{1}{2}$. Точка 3 это потенциально возможное решение с высокой локализацией электрона у ядра и с высокой энергией связи. Как видим подобные решения у уравнения Дирака отсутствуют. Поэтому, как было сказано, в области энергий ниже основного состояния, к решениям уравнения Дирака приведенным в различных работах [5],[6],[7],[8], надо относиться с осторожностью.

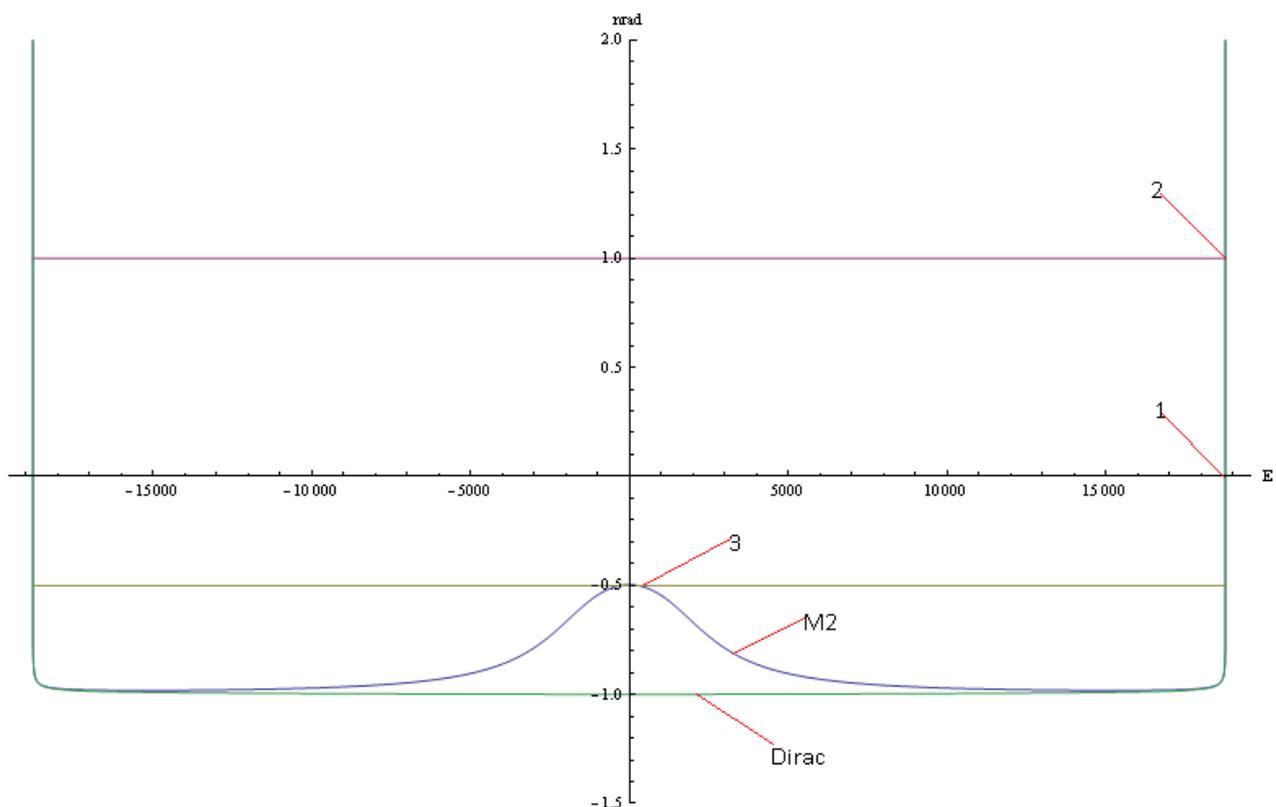


Рис.2 График зависимости энергии от радиального квантового числа n_{rad} при $l=0$ для уравнений Дирака и M2.

Предположение о существовании компактных локализованных состояний атома водорода, полагает наличие высокой энергии связи. Энергия связи должна быть выше чем принятого основного состояния. А это в свою очередь предполагает смещение радиального или орбитального квантового числа в сторону отрицательных значений $n_{rad} < 0$ или $l < 0$.

Посмотрев на график зависимости энергии от квантового числа n_{rad} Рис.2. можно понять, что таким значением является $n_{rad} = -\frac{1}{2}$. Случай когда $l < 0$ особенный и будет рассмотрен отдельно. При этом единственно возможное отрицательное значение $l = -\frac{1}{2}$.

Определим энергию локализованного состояния 3 решая уравнение (2.3) с параметрами $l = 0, n_{rad} = -\frac{1}{2}$. Решение дает $E = \frac{\sqrt{c^4 - c^3 \sqrt{c^2 - 16Z^2}}}{\sqrt{2}}$ (3.1) Подставляя в полученную

формулу значение скорости света $c = 137.0359971$ и значение заряда ядра $Z = 1$ получим энергию $E = 274.10119971623305$ в атомных единицах Хартри. Полученная энергия включает в себя энергию покоя электрона mc^2 . Учитывая это определим энергию связи и преобразуем в электрон-вольты $E = 27.2 * (274.10119971623305 - 137.0359971^2) = -503329.5812570386$ эВ.

Построим график нормированной радиальной волновой функции для состояния 3. Рис. 3.

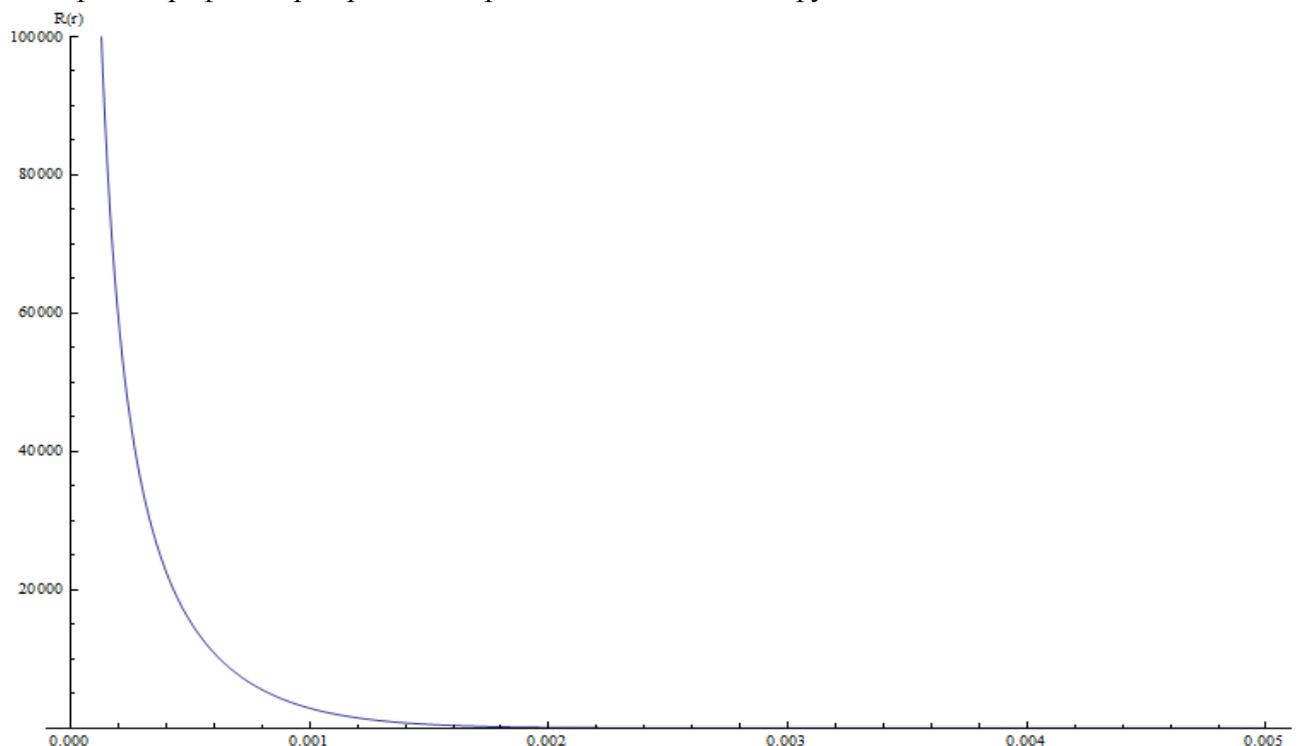


Рис.3 Нормированная радиальная волновая функция для состояния 3 при $l = 0, n_{rad} = -\frac{1}{2}$,

$$E = -503329.5812570386 \text{ эВ}$$

Как видим волновая функция стремится к бесконечности при $r \rightarrow 0$. Но такое поведение нельзя считать не физическим. Потому что, это следствие бесконечного роста в отрицательную сторону Кулоновского потенциала при $r \rightarrow 0$ $-\frac{Z}{r} \rightarrow -\infty$. В реальности же, потенциал отличается от чисто Кулоновского при $r \rightarrow 0$ и является ограниченным снизу, так как ядро не является точечным а имеет размеры.

Построим график нормированной радиальной плотности вероятности для состояния 3. Рис. 4. Таким образом, мы показали возможность существования у атома водорода сильно локализованных, компактных состояний с высокой энергией связи.

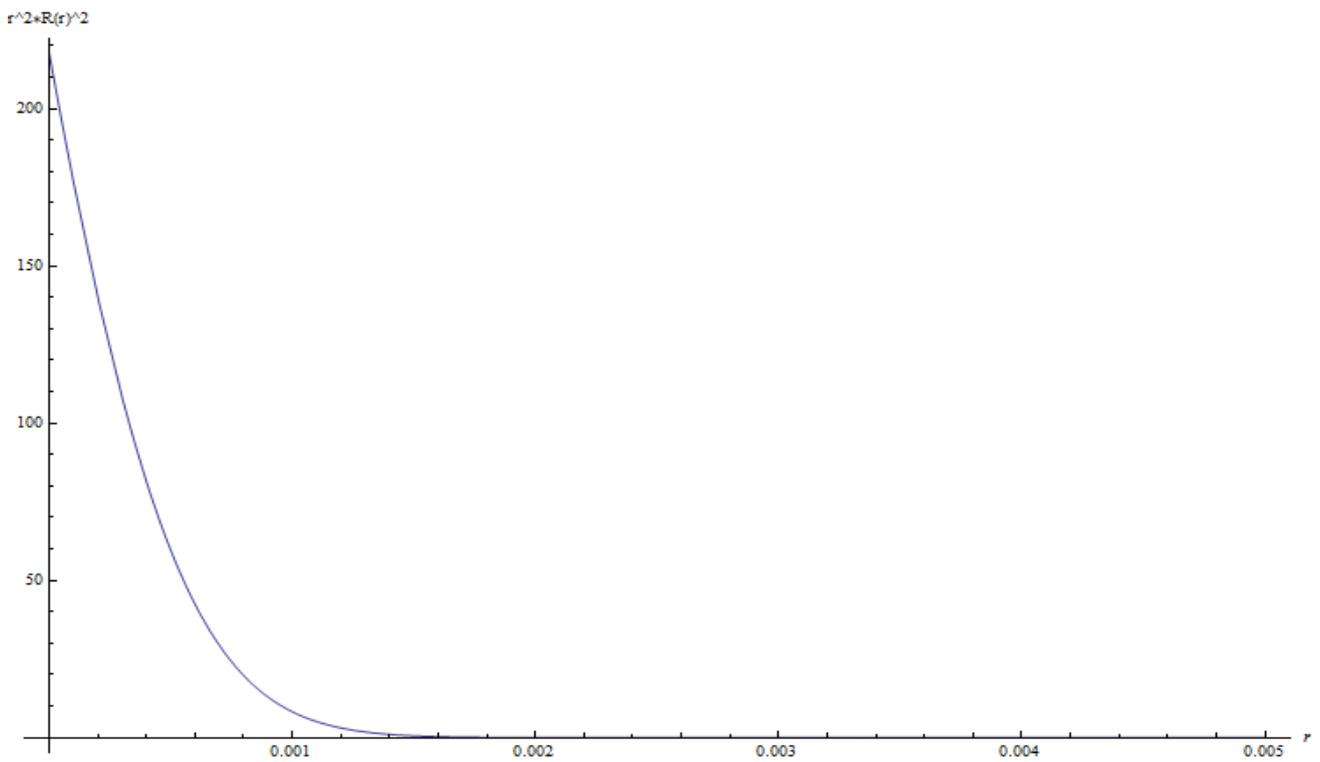


Рис.4 Нормированная радиальная плотность вероятности состояния 3

Манипулируя значениями квантовых чисел l и n_{rad} в допустимых пределах, можно получить семейство таких решений. Покажем это в виде семейства графиков Рис.5. А затем приведем таблицу соответствующих значений энергий и квантовых чисел.

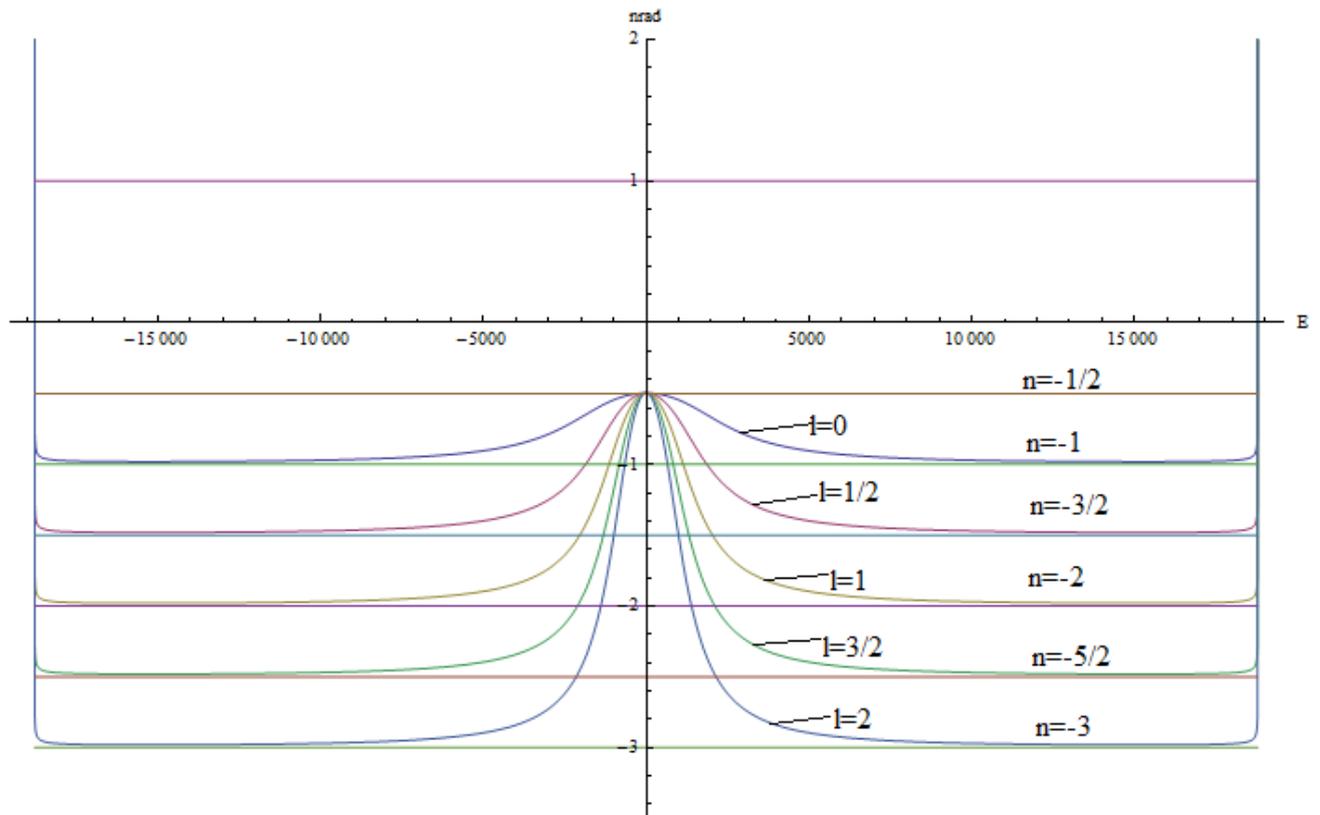


Рис.5 Семейство графиков зависимости энергии от радиального квантового числа n_{rad} при различных значениях квантового числа $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$

Энергии связи компактного атома водорода в зависимости от квантовых чисел эВ

$l \setminus n$	-1/2	-1	-3/2	-2	-5/2	-3	-7/2	-4	-9/2	-5
0	-503330	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1/2	-507058	-460092	-	-	-	-	-	-	-	-
1	-508300	-479790	-455327	-	-	-	-	-	-	-
3/2	-508921	-488160	-475050	-453404	-	-	-	-	-	-
2	-509294	-492901	-483786	-472899	-452362	-	-	-	-	-
5/2	-509543	-495977	-488919	-481637	-471665	-451708	-	-	-	-
3	-509720	-498141	-492348	-486844	-480348	-470863	-451259	-	-	-
7/2	-509853	-499749	-494819	-490371	-485555	-479486	-470300	-450933	-	-
4	-509957	-500992	-496692	-492945	-489107	-484673	-478869	-469883	-450684	-
9/2	-510040	-501982	-498164	-494917	-491718	-488225	-484030	-478405	-469561	-450488
5	-510107	-502789	-499353	-496483	-493732	-490847	-487573	-483541	-478043	-469305

Компактный атом водорода и аннигиляционный пик

В различных природных явлениях, в излучении солнечной короны, в космических излучениях, при исследовании грозových облаков, часто наблюдаются гамма фотоны с энергией $E = mc^2 \approx 511$ кэВ. Такое излучение обычно объясняется аннигиляцией электрон-позитронной пары. Но во многих случаях, объяснить наличие антивещества в наблюдаемой зоне, просто невозможно.

Исследователь J.Va'vra [5] выдвигает гипотезу о том, что излучение 511 кэВ может быть следствием захвата электрона протоном на низкую орбиту, в процессе образования компактного атома водорода.

Мы сейчас проверим эту гипотезу.

Излучение с энергией mc^2 означает, что вся энергия электрона излучена и следовательно в уравнении надо подставить значение энергии $E = 0$. Запишем уравнение M2 с энергией $E = 0$

$$\Delta\Psi - \frac{1}{\hbar^2} \left[\frac{m^4 c^6}{(-U(\vec{r}))^2} - m^2 c^2 \right] \Psi = 0 \quad (4.1)$$

В работе [2] достаточно подробно было приведено

решение угловой части уравнения M2. Поэтому сразу перейдем к решению радиального уравнения. Запишем радиальное уравнение M2 в атомных единицах Хартри с учетом $E = 0$, $Z = 1$.

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R - \left[\frac{c^6}{\left(\frac{1}{r}\right)^2} - c^2 \right] R = 0 \quad (4.2)$$

Для решения полученного уравнения,

воспользуемся математическим интернет ресурсом **WolframAlpha**

<http://www.wolframalpha.com/>

Решение имеет вид:

$$R(r) = \frac{k_1 2^{\frac{1}{4}(1-2l)} (r^2)^{\frac{1}{4}(1-2l)} e^{-\frac{1}{2}c^3 r^2} \text{HypergeometricU}\left(\frac{-2lc+c-1}{4c}, \frac{1}{2}-l, c^3 r^2\right)}{r^{\frac{3}{2}}} + \frac{k_2 2^{\frac{1}{4}(1-2l)} (r^2)^{\frac{1}{4}(1-2l)} e^{-\frac{1}{2}c^3 r^2} \text{LaguerreL}\left(-\frac{-2lc+c-1}{4c}, -\frac{1}{2}-l, c^3 r^2\right)}{r^{\frac{3}{2}}} \quad (4.3)$$

То есть является суммой двух линейно независимых частей. Вырожденной гипергеометрической функции второго рода и обобщенных полиномов Лагерра.

Воспользуемся первым линейно независимым решением.

$$R(r) = \frac{k_1 2^{\frac{1}{4}(1-2l)} (r^2)^{\frac{1}{4}(1-2l)} e^{-\frac{1}{2}c^3 r^2} \text{HypergeometricU}\left(\frac{-2lc+c-1}{4c}, \frac{1}{2}-l, c^3 r^2\right)}{r^{\frac{3}{2}}} \quad (4.4)$$

Где HypergeometricU вырожденная гипергеометрическая функция второго рода и k_1 константа интегрирования.

Поскольку мы рассматриваем случай когда вся энергия электрона излучена, то естественно энергию состояния получим $E_0 = -mc^2 = -(137.03599971)^2 = -18778.8652165$ в единицах Хартри. Преобразуем в электрон-вольты $E_0 = 27.2 * (-18778.8652165) = -510785.13388932$ эВ.

Теперь пришло время рассмотрения особого случая когда $l = -\frac{1}{2}$. Подставим это значение в уравнение (4.4) и определим константу интегрирования k_1 из условия нормировки

$$\int_0^{\infty} k_1^2 R(r)^2 4\pi r^2 dr = 1 \quad (4.5). \quad k_1 = 361.23722848$$

Построим график нормированной радиальной волновой функции (4.4) при $l = -\frac{1}{2}$ Рис. 6.

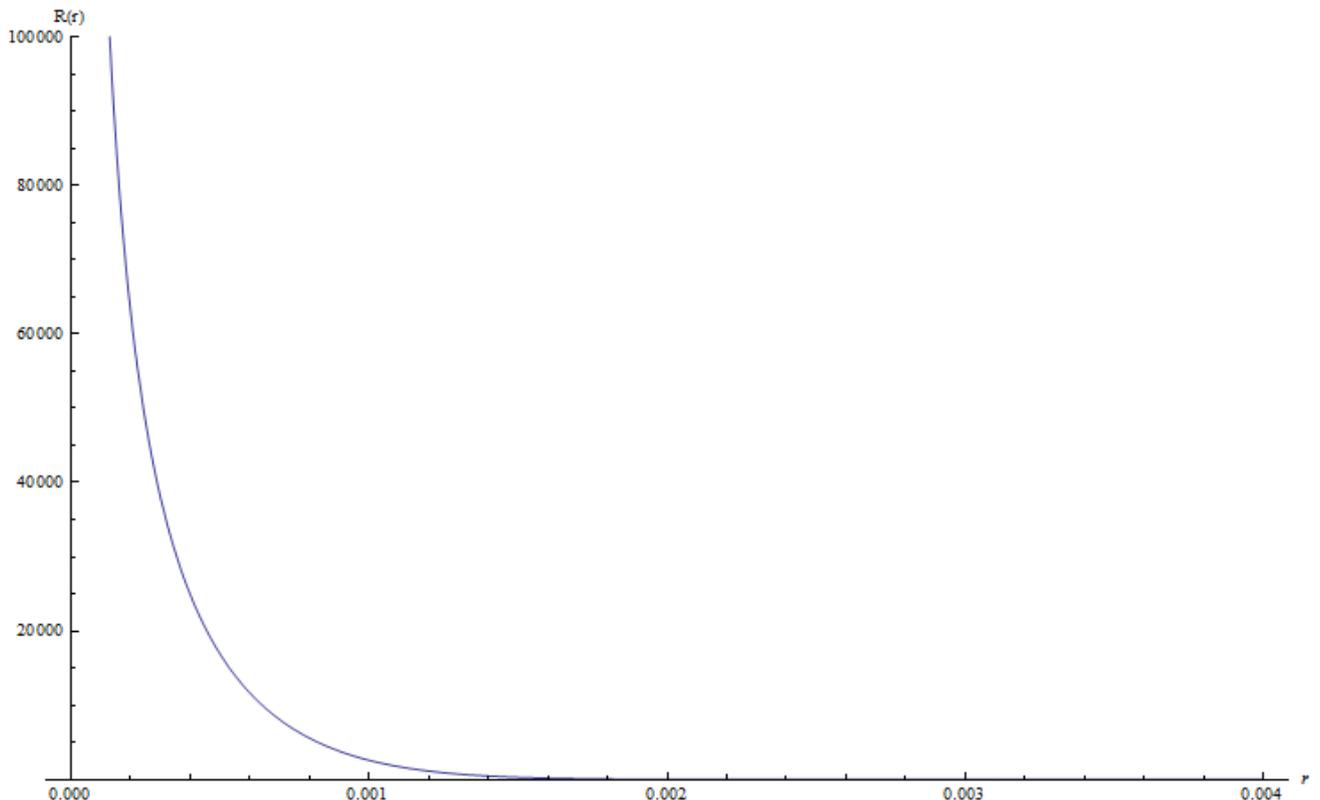


Рис. 6 График радиальной волновой функции (4.4) при $l = -\frac{1}{2}$ $E_0 = -510785.13388932$ эВ

Построим график нормированной радиальной плотности вероятности при $l = -\frac{1}{2}$ Рис. 7.

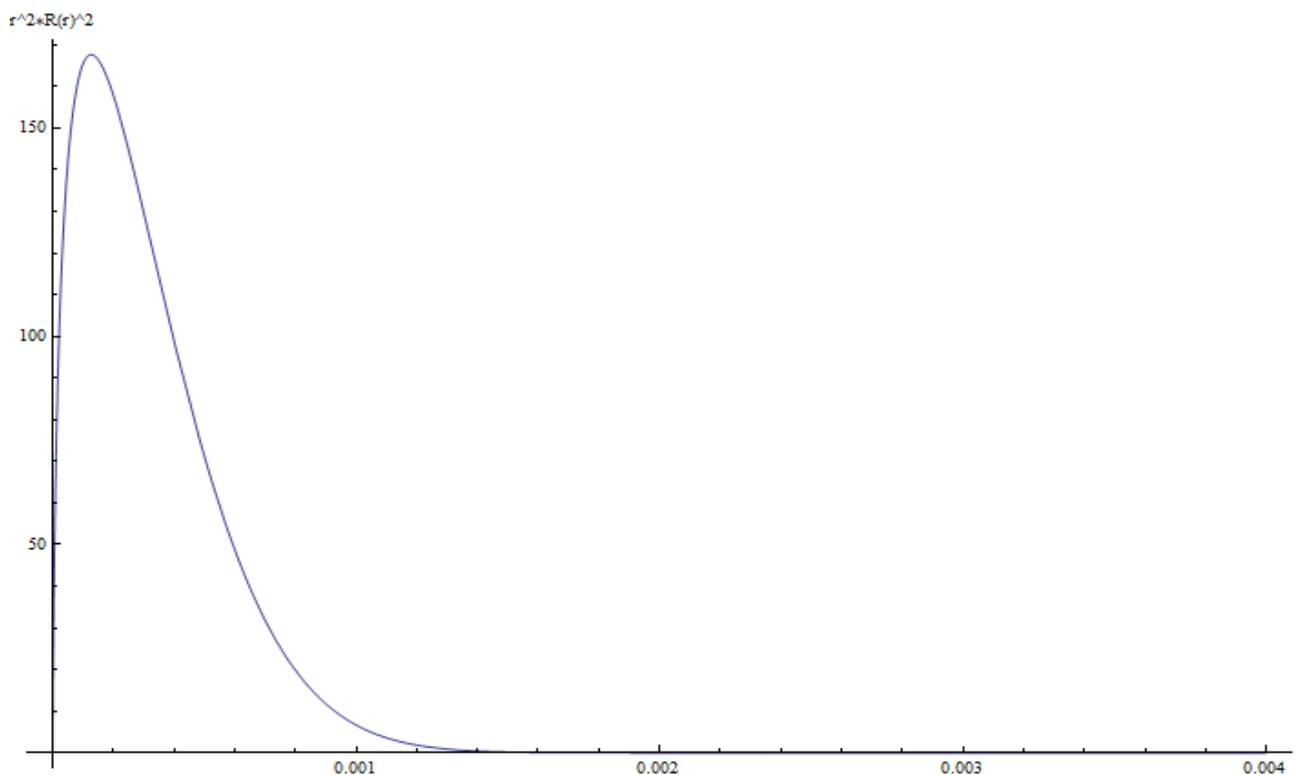


Рис. 7 Радиальная плотность вероятности при $l = -\frac{1}{2}$ и $E_0 = -510785.13388932$ эВ

Определим орбитальный радиус, то есть расстояние от начала координат до точки максимума плотности вероятности. $r_0 = 0.00012715729$ в атомных единицах. Умножив полученное значение на радиус Бора $a_0 = 52.9 \cdot 10^{-12}$ м получим $r_0 = 0.00012715729 \cdot 52.9 \cdot 10^{-12} = 0.006726620641 \cdot 10^{-12}$ м.

Таким образом, путем решения уравнения M2, была доказана возможность существования, неизвестного до настоящего времени состояния, для атома водорода со следующими параметрами: Значение квантового числа $l = -\frac{1}{2}$. Значение энергии состояния $E_0 = -510785.13388932$ эВ. Значение орбитального радиуса $r_0 = 0.006726620641 \cdot 10^{-12}$ м. При образовании данного состояния выделяется энергия $E = mc^2 \approx 511$ кэВ, что подтверждает гипотезу J.Va'vra [5] о происхождении аннигиляционного пика связанного с образованием компактного атома водорода.

Численное решение в цилиндрических координатах

Как и в предыдущий раз [2], при применении нестандартного значения квантового числа $l = -\frac{1}{2}$, желательно дополнительное подтверждение полученного аналитического решения. В предыдущей работе [2] этот вопрос подробно изложен. Поэтому сразу запишем уравнение M2 в цилиндрических координатах со значением энергии $E = 0$, и со значением квантового числа $m = 0$. Это означает, что энергия связи равна $E_0 = -510785.13388932$ эВ. Для водорода $Z = 1$.

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - \left[\frac{c^6}{\left(\frac{Z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)^2} - c^2 \right] R = 0 \quad (5.1)$$

Для решения уравнения (5.1) будем пользоваться пакетом программ для численного решения систем дифференциальных уравнений **FlexPDE** <http://www.pdesolutions.com/>

В результате численного решения получены следующие значения параметров водорода в состоянии $E = 0$. Энергия связи $E_0 = -510744.2$ эВ, орбитальный радиус $r_0 = 0.007460784 * 10^{-12}$ м.

Что достаточно хорошо согласуется с данными аналитического решения.

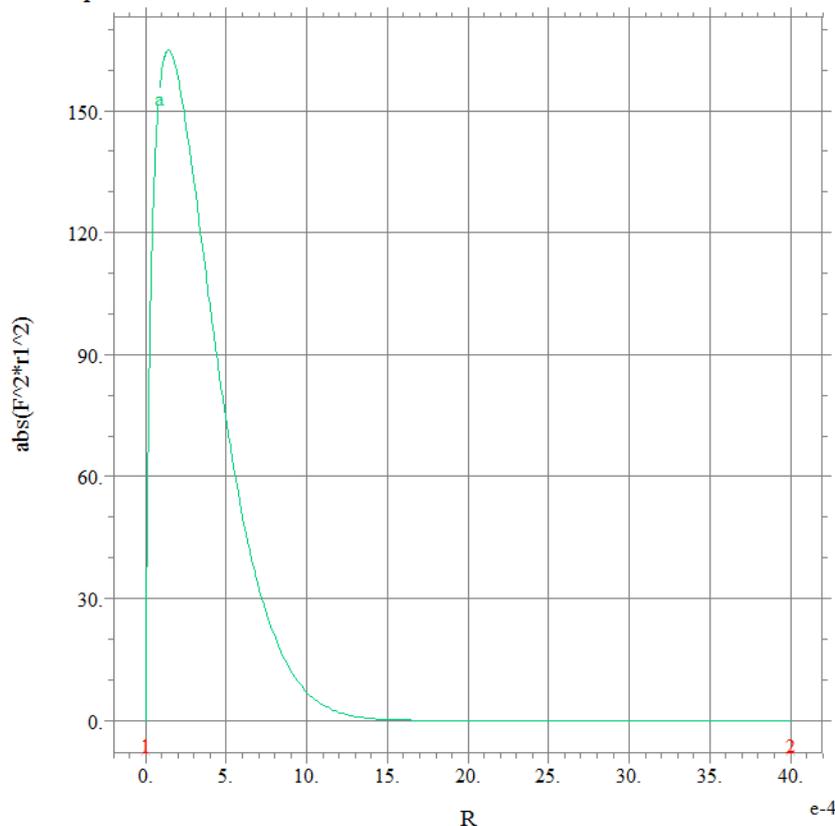
Численное решение показало:

1. Уравнение для состояния водорода с энергией связи $E_0 = -510785.13388932$ эВ имеет достаточно высокую сходимость.
2. Беспокойства по поводу сингулярного поведения угловой части волновой функции беспочвенны.
3. Следовательно имеются достаточно оснований для целесообразности экспериментального поиска водорода в состоянии с $E_0 = -510785.13388932$ эВ и $r_0 = 0.006726620641 * 10^{-12}$ м.

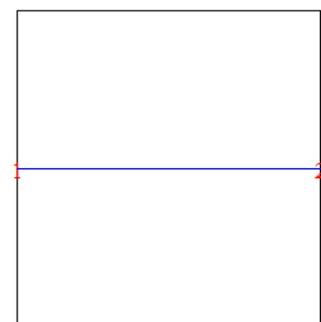
Ниже приведем результаты решения в виде двумерных и трехмерных графиков радиальной плотности вероятности.

M2 Equation H

18:10:04 5/13/16
FlexPDE 5.0.22



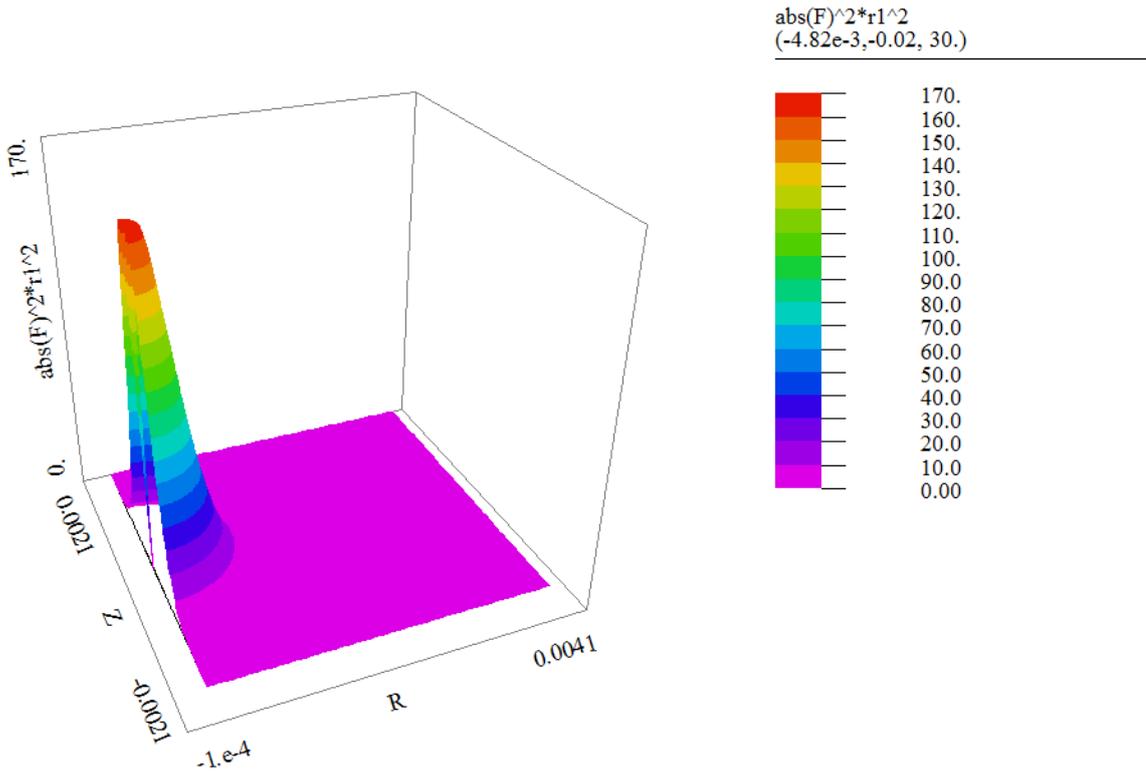
abs(F^2*r1^2)
from (0,0)
to (R0,0)
a: abs(F^2*r1^2)



M2Z=1: Grid#6 p2 Nodes=18691 Cells=9240 RMS Err= 9.4e-7

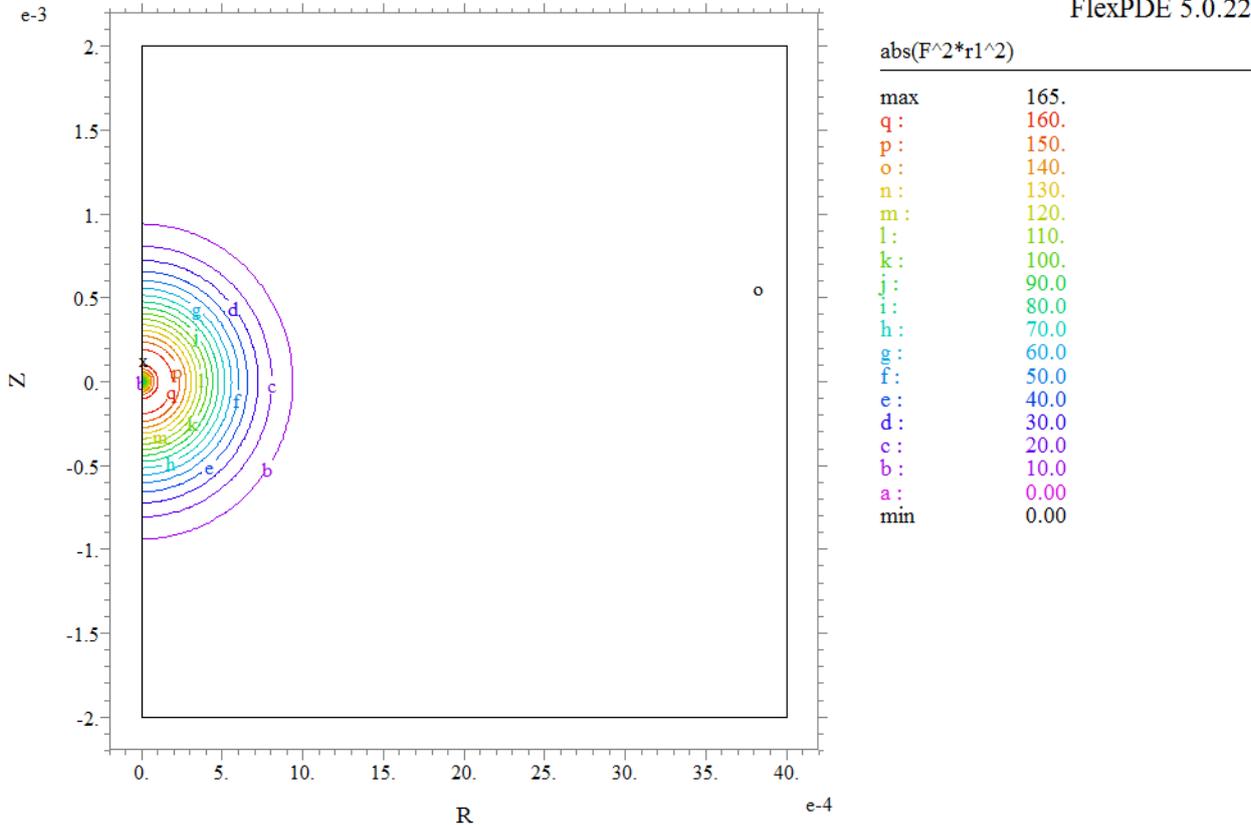
E0 eV= -510785.1 E eV= -510744.2 Orbital Radius*52.9 (pm)= 7.460784e-3 Surf_Integral= 1.648877e-4

Рис.8 Двумерный график радиальной плотности вероятности



M2Z=1: Grid#6 p2 Nodes=18691 Cells=9240 RMS Err= 9.4e-7
E0 eV= -510785.1 E eV= -510744.2 Orbital Radius*52.9 (pm)= 7.460784e-3 Vol_Integral= 1.633578e-7

Рис.9 Трехмерный график радиальной плотности вероятности



M2Z=1: Grid#6 p2 Nodes=18691 Cells=9240 RMS Err= 9.4e-7
E0 eV= -510785.1 E eV= -510744.2 Orbital Radius*52.9 (pm)= 7.460784e-3 Vol_Integral= 1.633578e-7

Рис.10 Проекция трехмерной радиальной плотности вероятности

Результаты и обсуждения

Найдена и устранена ошибка в уравнении Клейна-Гордона. В результате, подтверждена правильность уравнения M2. Следовательно, тему о многолетних спорах о противоречии СТО и квантовой механики, можно считать исчерпанной.

Применение уравнения M2 к атому водорода, выявило дополнительные тонкости в поведении электрона. Было получено семейство сильно локализованных состояний с высокой энергией связи. Получены значения энергий в зависимости от квантовых чисел. Во многих работах [5],[6],[7],[8], приведены подобные решения уравнения Дирака. Однако, во втором разделе было показано, что уравнение Дирака не имеет подобного поведения. И без дополнительной манипуляции с Кулоновским потенциалом, подобных решений не получится.

Далее аналитическим и численным решением уравнения M2, была доказана гипотеза J.Va'vra [5] о происхождении аннигиляционного пика связанного с образованием компактного атома водорода. Были получены параметры этого состояния: энергия связи $E_0 = -510785.13388932$ эВ и орбитальный радиус $r_0 = 0.006726620641 * 10^{-12}$ м.

Думаем представлено достаточно теоретических оснований, для организации экспериментального поиска описанных состояний атома водорода.

Литература

1. [Дангян А.Э. “Новое уравнение релятивистской квантовой механики”](#)
2. Дангян А.Э. “Атом Водорода Экзотические состояния. Часть первая”
3. [Дангян А.Э. “Позитроний”](#)
4. [Дангян А.Э. “Волновая функция электрона”](#)
5. J. Va'vra, “A new way to explain the 511 keV signal from the center of the Galaxy and some dark matter experiments,” Astronomy & Astrophysics <http://arxiv.org/pdf/1304.0833v3.pdf>
6. Arguments for the Anomalous Solutions of the Dirac Equations
Jean-Luc Paillet, Andrew Meulenberg <http://vixra.org/pdf/1506.0177v1.pdf>
7. Jan Naudts. *On the hydrino state of the relativistic hydrogen atom.*
[arXiv:physics/0507193v2](http://arxiv.org/abs/physics/0507193v2)
8. Electron Deep Orbits of the Hydrogen Atom
<http://www.iscmns.org/work11/12%20Paillet-EDOH-Full1.pdf>
9. [Курчатов И.В. “О возможности создания термоядерных реакций в газовом разряде”](#)
10. [ELECTRON TRANSITIONS ON DEEP DIRAC LEVELS I](#)
[JAROMIR A. MALY Applied Science Consultants 5819 Ettersberg Drive, San Jose, California 95123, JAROSLAV VAVRA Applied Science Consultants 67 Pine Lane, Los Altos, California 94022](#)