Двойственность
совместных систем линейных алгебраических уравнений,
имеющих бесконечное множество решений

При решении совместных систем линейных алгебраических уравнений, имеющих бесконечное множество решений, замечена некая, ничем не объяснимая, двойственность: при графическом исследовании системы предстаёт очевидный факт, что система имеет единственное решение, но при аналитическом исследовании – бесконечное множество решений. Где истина?

Пример 1: Решить систему линейных алгебраических уравнений, (имеющую в силу недостаточности количества уравнений в ней бесконечное множество решений)

$2x + y = 3$ красная прямая
$x + y + z = 2$ голубой контур

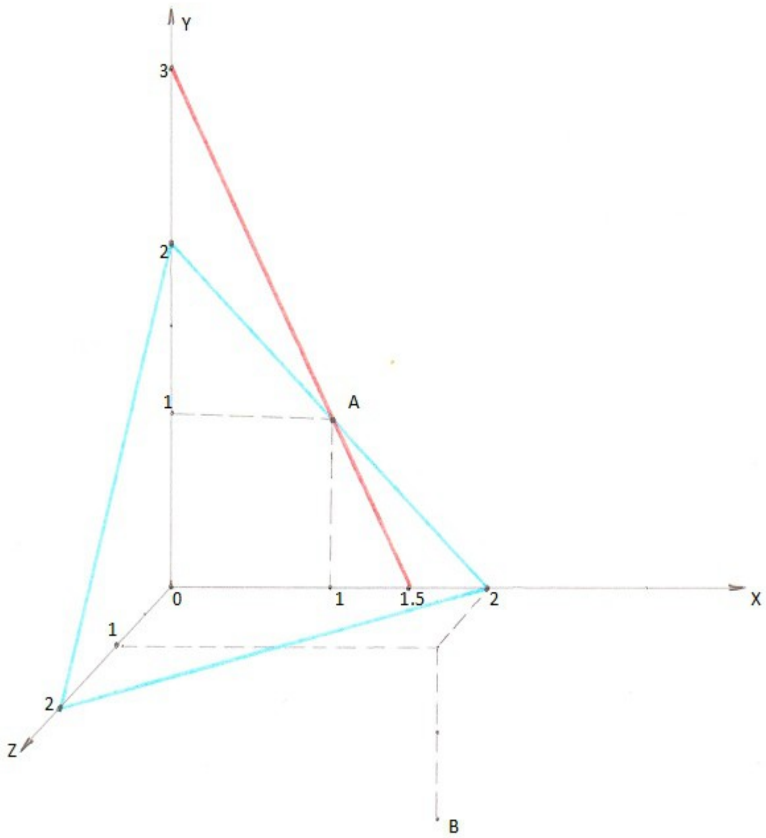

Рис.1

Из рис.1 видно, что т.А (1, 1, 0), координаты которой являются решением системы, вопреки всем канонам предстаёт единственной в своём роде и потому других решений, кроме этого, не наблюдается и не представляется. Но, если в соответствии с аналитическими правилами присвоить, к примеру, z = 1 и решить систему снова, то получим другое решение, а именно B(2, -1, 1).

Но здесь стоит оговориться, что новое решение (судя по рисунку) уже не является системной принадлежностью исходной системы уравнений. Оно представляет собой нечто новое, не связанное никакими узами с условиями задачи. Оно приобретает призрачное существование. Возникает вопрос, а является ли правомочным в этой ситуации признание данной системы уравнений, как системы, имеющей бесконечно много решений вместо решения единственного?

Попробуем в этом разобраться.

Остановимся на понятии «система уравнений» вообще и «система линейных алгебраических уравнений» - в частности.

Разные источники в Интернете привычно, но по-разному провозглашают понятие «система уравнений»:

- *Система линейных алгебраических уравнений* **…** — *система уравнений, каждое уравнение в которой является линейным — алгебраическим уравнением первой степени. (Википедия)*

- *Система уравнений — это условие, состоящее в одновременном выполнении нескольких уравнений относительно нескольких (или одной) переменных. (Википедия)*

-*http://www.berdov.com/works/algebra/system_of_linear_equations/*

Система линейных уравнений — это объединение из n линейных уравнений, каждое из которых содержит k переменных.

Но вот один из источников Интернета (http://fpi-kubagro.ru/opredeleniya-ponyatiya-sistema/) даёт несколько определений понятия «системы» вообще:

- *Система – это совокупность элементов ..., закономерно связанных друг с другом в единое целое ...*

- *Система – целое, образованное взаимоподчинением составляющих его частей, элементов (Энциклопедический словарь).*

- *Система – множество связанных между собой элементов, составляющих определенное целостное образование (Философский словарь).*

- *Система – это множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность, единство (Советский энциклопедический словарь).*

- *Система – это устройство, структура, представляющая собой единство взаимно связанных частей (словарь русского языка).*

- *Система: множество взаимосвязанных элементов, каждый из которых связан прямо или косвенно с каждым другим элементом, а два любые подмножества этого множества не могут быть независимыми (Акофф Э.).*

- *Система – это множество элементов, поставленных в отношение друг к другу, необходимое и достаточное для наличия функционального свойства данного множества (СагатовскийВ.).*

Из вышесказанного мы замечаем, что в определении понятия “система уравнений” ни в одном случае не упоминается то её неоспоримое свойство, которое присуще любой системе, т. е. закономерная связанность друг с другом её элементов.

Возвращаясь к рис.1, мы в отношении решения B(2, -1, 1) приходим к выводу, что оно находится вне требования такой “закономерной связанности”. Так можно ли его в полной мере считать правомочным решением?

Для пояснения этой мысли рассмотрим ещё один пример.

Пример 2: Решить систему линейных алгебраических уравнений, (имеющую в силу недостаточного количества уравнений в ней бесконечное множество решений)

$2x + y + 3z = 3$ красный контур

$x + y + z = 2$ голубой контур

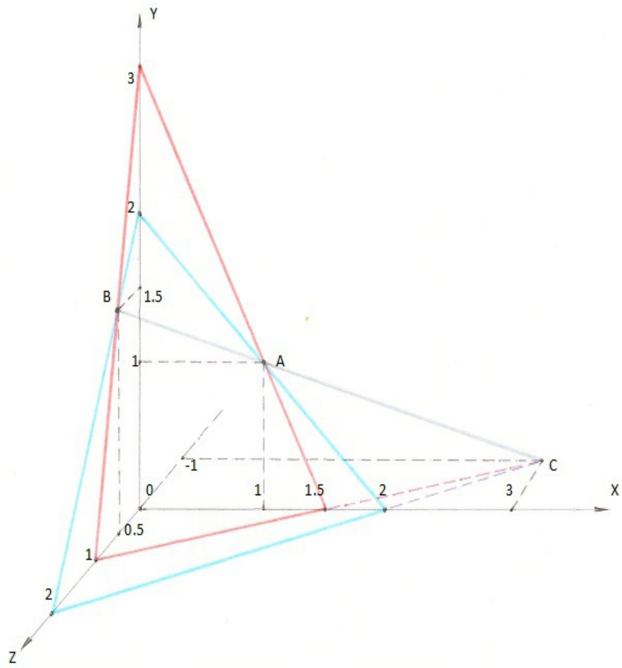

Рис. 2…

Из рис.2 видно, что прямая BC является линией пересечения плоскостей-образов первого (красный контур) уравнения и второго (голубой контур). Значит, все точки этой прямой в своём бесконечном множестве являются решением данной системы уравнений. И это полностью правомочный факт, т. к. ни одна точка-решение на этой линии не выпадает из рамок требования “закономерной связанности”.

На рис.2 изображены три таких точки-решения –
A (1, 1, 0), B (0, 1.5, 0.5) и C (3, 0, -1). Они действительно являются частными

решениями совместной системы линейных алгебраических уравнений, имеющей бесконечное множество решений.

Вывод:

Исходя из графического и аналитического исследования данной совместной системы линейных алгебраических уравнений, имеющей бесконечное множество решений, напрашивается существование некоей двойственности понятия “бесконечного множества решений”.

Что является причиной этого и как с этим поступать, неизвестно.

Успокоить может лишь то, что и в природе, и в математике аналогичные двойственности существуют.

Но к этому хочется добавить: множественность решений считать таковою “в чистом виде” едва ли можно по трём хотя бы причинам:
- когда много решений, то задача решения системы уравнений трансформируется в задачу выбора,
- умозрительно: когда много решений, остаётся впечатление, что нет и одного
- как показывает данное исследование, какие-то “решения” среди их множества являются эфемерными в смысле понятия “решение”.

Конец статьи