В данной работе представлен разработанный автором бисекторный метод решения обособленных линейных алгебраических уравнений и их систем, а также - применение графических приёмов их решения и определения совместности с помощью разработанной им ранее реальной многомерной произвольно-угольной системы координат. Освещение этой работы сопровождается достаточным количеством иллюстраций, что повышает её наглядность и интерес не только математиков, но и просто любознательных читателей.

Бочаров Николай Алексеевич, военный пенсионер, подполковник в отставке, программист, в 1972 году окончил Харьковскую военную инженерную радиотехническую академию ПВО им. Маршала Советского Союза Говорова Л.А.

978-3-659-84748-6

Николай Бочаров

Неизвестное об известном

Обособленность - не порок

LAP LAMBERT Academic Publishing

Николай Бочаров

Неизвестное об известном

Николай Бочаров

Неизвестное об известном

Обособленность - не порок

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:
LAP LAMBERT Academic Publishing
ist ein Imprint der / является торговой маркой
OmniScriptum GmbH & Co. KG
Bahnhofstraße 28, 66111 Saarbrücken, Deutschland / Германия
Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Напечатано: см. последнюю страницу
ISBN: 978-3-659-84748-6

Содержание

Вступление

В данной работе автор рассмотрение методов решения систем с полным набором линейных алгебраических уравнений и неизвестных не планировал, т. к. в настоящее время таких методов существует вполне достаточно. Но линия работы с обособленными уравнениями естественно и логично продиктовала плавный переход и к новым методам решения уравнений системных, т. е. входящих в систему уравнений.

Решению обособленных уравнений на просторах математики внимания уделено очень мало. Автор попытался отыскать в Интернете хоть что-то на данную тему. С трудом нашёл лишь (сайт **studigs.net** Математический журнал «Рекомендации и стратегии учащимся», статья «Решение линейных уравнений») одну статью. В ней описывается решение уравнений вида 2x + 4 = 10. И решение ещё одного вида уравнения. Его для назидания стоит здесь привести:

Решить уравнение (т. е. по установившейся привычке мы хотим узнать значения $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, которые бы удовлетворяли указанному ниже равенству):

$$4x – 4y = 8$$

Порядок решения (без комментариев):

$$4x – 4y = 8$$

$$4x – 4y + 4y = 8 + 4y$$

$$4x = 8 + 4y$$

$$\frac{4}{4}x = \frac{8+4y}{4}$$

$$x = 2 + y$$

$$8 + 4y – 4y = 8$$

$$8 = 8$$

Конец решения

Каковы же причины такого невнимания к решению обособленных линейных алгебраических уравнений? Может быть, одной из них является ложное мнение о том, что подобные уравнения не жизненны и в практике не применяются? Возьмём небольшой пример:

На имеющиеся в наличии 8 тыс. руб. необходимо приобрести четыре покупки №1 по цене x и четыре покупки №2 по цене y. Какими же должны быть эти цены, чтобы они удовлетворили равенству, т. е. найти хотя бы одно из бесконечного множества решений следующего уравнения.

$$a_1 x + a_2 y = b \quad \text{(общий вид)}$$

$$4x + 4y = 8$$

Данная работа направлена в основном на разработку метода решения обособленных линейных алгебраических уравнений. Но известно, что и так любое отдельное уравнение (кроме вида $ax = b$) имеет бесконечное множество решений. Только дело в том, что для выявления и использования хотя бы одного из них, надо иметь на руках всё это множество. А это невозможно. И всё-таки в данной статье автор попытался, применяя предложенный им т. н. бисекторный метод, справиться с тем, чтобы из множества решений данного обособленного линейного алгебраического уравнения гарантированно и легко найти хотя бы одно такое решение.

В данной работе предложен также один из способов решения «неполнокровных» систем уравнений, т. е. таких, которые состоят из недостаточного количества уравнений для поиска неизвестных.

В силу того, что в работе используется преимущественно графический способ решения обособленных уравнений и систем уравнений, а также – определения их совместности, она сопровождается широким спектром непривычных иллюстраций. При желании читатель может ознакомиться с их построением в Приложении 1, стр. …. Необходимо только сказать о следующем: естественно, что полуавтоматическое и ручное начертание рисунков не может при не нести с собой инструментальных и субъективных ошибок, влияющих напрямую на определение неизвестных именно из результатов графического построения решаемой задачи. Поэтому автор, не смотря на то, что изначально планировал иллюстрации использовать лишь в качестве наглядного материала, прибегал и к графическому непосредственному решению задач, т.е. к определению неизвестных с помощью графических построений. При этом точные величины неизвестных, используя приём подстановки и проверки их правильности, он устанавливал (по определённому “указанию” рисунков) вручную.

1. Обособленные линейные алгебраические уравнения и бисекторный метод их решения

Линейное алгебраическое уравнение — математическое равенство двух алгебраических выражений, содержащих одну или несколько неизвестных величин и сохраняющих свою силу только при их определённых значениях.

Обособленное линейное алгебраическое уравнение – отдельное уравнение, не входящее в систему уравнений.

Формальная запись его общего вида может выглядеть так:

$$\boldsymbol{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b}$$

где:

$\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots a_n}$ — коэффициенты уравнения,

$\boldsymbol{x_1, x_2 \ldots x_n}$ — неизвестные, которые надо определить,

b **–** свободный член, предполагается, что он известен.

Бисекторный метод решения обособленных линейных алгебраических уравнений

Определение: *среди бесконечного множества решений обособленного линейного алгебраического уравнения с любым количеством неизвестных обязательно найдётся одно, аргументы которого равны*.

Алгоритм решения

$$\boldsymbol{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b}$$

1. Вычисление арифметической суммы коэффициентов уравнения

$$\boldsymbol{S = a_1 + a_2 \ldots a_n}$$

2. Вычисление потенциала ***p***

$$\boldsymbol{p} = \frac{b}{S}$$

3. Присвоение аргументам $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, … $\boldsymbol{x_n}$ значения $\boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{x_1 = p, \quad x_2 = p, \quad \dots \quad x_n = p}$$

4. Проверка правильности решения уравнения путём подстановки.

Полученные числовые значения аргументов подставляем в уравнение и вычисляем равенство. Если равенство подтверждается, задача считается решённой. И наоборот.

Приведём несколько примеров.

Пример 1. Решить следующее уравнение:

$$- 4x + 3y = 12$$

Решение.

$$\boldsymbol{S} = = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}\,; \quad \boldsymbol{S} = - 4 + 3; \quad \boldsymbol{S} = - 1$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{b}{\mathrm{S}}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{12}{-1}; \qquad \boldsymbol{p} = -12$$

$$\boldsymbol{x} = -12; \qquad \boldsymbol{y} = -12;$$

Проверка

$$(-4) \cdot (-12) + 3 \cdot (-12) = 12; \quad 48 - 36 = 12; \quad 12 = 12$$

Равенство сохраняется, значит задача решена.

Пример 2. Решить следующее уравнение:

$$2x + 5y = 14$$

Решение.

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}\ ; \quad \boldsymbol{S} = 2 + 5; \quad \boldsymbol{S} = 7$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{b}{S}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{14}{7}; \qquad \boldsymbol{p} = 2$$

$$\boldsymbol{x} = 2; \qquad \boldsymbol{y} = 2;$$

Проверка опускается

Равенство сохраняется, значит задача решена.

Пример 3. Решить следующее уравнение:

$$2x + 4y + 4z = 12$$

Решение.

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}; \quad \boldsymbol{S} = 2 + 4 + 4; \quad \boldsymbol{S} = 10$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{b}{S}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{12}{10}; \qquad \boldsymbol{p} = \frac{6}{5}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{6}{5}; \qquad \boldsymbol{y} = \frac{6}{5}; \qquad \boldsymbol{z} = \frac{6}{5};$$

Проверка опускается

Равенство сохраняется, значит задача решена.

\- ***Пример 4.*** Решить следующее уравнение:

$$4x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 16x_4 = -18$$

Решение.

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{a_4}; \quad \boldsymbol{S} = 4 + 2 - 8 - 16; \quad \boldsymbol{S} = -18$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{\mathrm{b}}{S}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{-18}{-18}; \qquad \boldsymbol{p} = 1$$

$$\boldsymbol{x_1} = 1; \quad \boldsymbol{x_2} = 1; \quad \boldsymbol{x_3} = 1;$$

Проверка опускается.

Равенство сохраняется, значит задача решена.

__Пример 5__. Решить следующее уравнение:

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 3$$

Решение.

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{a_4} + \boldsymbol{a_5}; \quad \boldsymbol{S} = 1 - 3 + 4 - 7 + 2; \quad \boldsymbol{S} = -3$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{b}{S}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{3}{-3}; \qquad \boldsymbol{p} = -1$$

$$\boldsymbol{x_1} = -1; \quad \boldsymbol{x_2} = -1; \quad \boldsymbol{x_3} = -1; \quad \boldsymbol{x_4} = -1; \quad \boldsymbol{x_5} = -1$$

Проверка опускается

Равенство сохраняется, значит задача решена.

Бывают и аномальные уравнения, решение которых выходит за рамки данного метода. К примеру, такое уравнение

$$4x - 4y = 8$$

Решение.

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}; \quad \boldsymbol{S} = 4 - 4; \quad \boldsymbol{S} = 0$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{b}{S}$$

$$p = \frac{8}{0}; \qquad p = \infty \text{ (бесконечность)}$$

Решение не найдено. Но при творческом подходе его всё-таки можно найти: при определении величины S суммировать абсолютные величины коэффициентов уравнения, т. е. без учёта их знаков. Тогда

$$S = /a_1/ + /a_2/; \quad S = 4 + 4; \quad S = 8$$

$$p = \frac{b}{S}$$

$$p = \frac{b}{S} \qquad p = 1$$

При определении значений x и y присваиваем каждому из них знак соответствующего каждому из них коэффициента в исходном уравнении. Тогда решение будет таким:

$$x = +1$$

$$y = -1$$

Проверка $4 \cdot (1) - 4 \cdot (-1) = 8; \quad 8 = 8;$

Равенство сохраняется, значит задача решена.

Этот же пример можно решить и графическим путём. Но следует учитывать, что результаты такого решения могут быть менее точными, чем

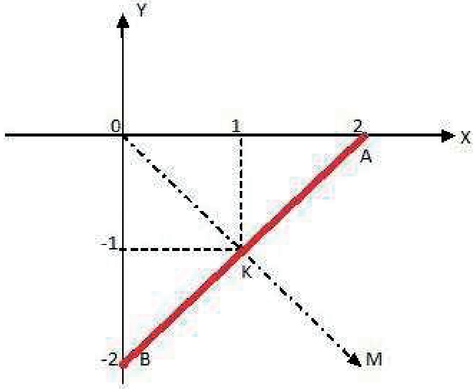

Рис.1

в решении числовом.

На рис.1 отображено:

AB – образ исходного уравнения
OM – биссектриса (по анл. - bisektor, отсюда бисекторный метод)
K – точка пересечения биссектрисы OM с образом исходного уравнения AB.

1 - величина аргумента ***x***
-1 - величина аргумента ***y***

Таким образом, становится очевидным, что ***x*** = 1, а ***y*** = - 1
Это и есть решение уравнения.

Иногда возникает потребность априори присвоить одному из аргументов определённое числовое значение. Рассмотрим такой пример.

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 3$$

Решение.

Пусть $x_3 = 3$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$x_1 - 3x_2 + 4*3 - 7x_4 + 2x_5 = 3$$
$$x_1 - 3x_2 + 12 - 7x_4 + 2x_5 = 3$$
$$x_1 - 3x_2 - 7x_4 + 2x_5 = -9$$

Получившееся уравнение решаем бисекторным методом

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_4} + \boldsymbol{a_5}; \quad \boldsymbol{S} = 1 - 3 - 7 + 2; \quad \boldsymbol{S} = -7$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{b}{S};$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{-9}{-7}; \quad \boldsymbol{p} = \frac{9}{7}$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{9}{7}; \quad \boldsymbol{x_2} = \frac{9}{7}; \quad \boldsymbol{x_3} = 3; \quad \boldsymbol{x_4} = \frac{9}{7}; \quad \boldsymbol{x_5} = \frac{9}{7}$$

Проверка

$$1 \cdot \frac{9}{7} - 3 \cdot \frac{9}{7} + 12 - 7 \cdot \frac{9}{7} + 2 \cdot \frac{9}{7} = 3;$$

$$\frac{9}{7} - \frac{27}{7} + 12 - \frac{63}{7} + \frac{18}{7} = -9;$$

$$\frac{27}{7} - \frac{27}{7} - \frac{63}{7} = -9$$

$$-\frac{63}{7} = -9$$

$$-9 = -9$$

Равенство сохраняется, значит задача по изменённому уравнению решена. Проверка уравнения исходного опускается.

Таким образом, решение уравнения следующее

$$\boldsymbol{x_1 =} \frac{9}{7}; \quad \boldsymbol{x_2 =} \frac{9}{7}; \quad \boldsymbol{x_3 =} 3; \quad \boldsymbol{x_4 =} \frac{9}{7}; \quad \boldsymbol{x_5 =} \frac{9}{7}$$

2. Системы линейных алгебраических уравнений, совместность и бисекторный метод их решения

Терминология и её некоторые особенности

В математике есть понятие «система линейных алгебраических уравнений».

Система уравнений — это условие, состоящее в одновременном выполнении НЕСКОЛЬКИХ уравнений относительно нескольких (или одной) переменных.

Формальная запись общего вида может выглядеть так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_2 = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}\ x_n = b_m \end{cases}$$

Здесь:

m— количество уравнений,

n — количество неизвестных.

$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$ — неизвестные, которые надо определить. Коэффициенты системы $a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{mn}$ и свободные члены $b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_m$ предполагаются известными.

Индексы коэффициентов (a_{ij}) системы обозначают номера уравнения (i) и неизвестного (j), при котором стоит этот коэффициент, соответственно.

Существует множество методов решения систем уравнений. Подход зависит от типа системы. Так, решение систем линейных уравнений полностью исследовано: у них найдены аналитические методы (метод Крамера) и предложено несколько численных точных (простейший — метод Гаусса), так и приближённых (метод итераций).

Обратим внимание, что в этом перечислении не присутствуют графические методы решения систем уравнений. Данная работа восполняет этот пробел. Но, прежде, чем приступить к изложению применения бисекторного метода к решению систем уравнений необходимо остановиться на следующем:

Понятие «Система уравнений совместная/несовместная» давно и прочно укоренилось в математической среде. С одной стороны это оправдано: сначала необходимо ответить на вопрос: Быть или не быть … решению системы уравнений? Но, с другой стороны, опыт решения систем уравнений с предварительной проверкой их на совместность показывает, что сама эта проверка по затрачиваемому времени адекватна времени самого процесса решения. Так стоит ли тратить время на проверку, если, решив её (или не решив) всё равно об этом будет известно. Как говорится, нырнув в воду, заодно искупаюсь и узнаю, холодна ли она. Но бывают объёмные и сложные задачи, которые лучше сначала исследовать на совместность. Как говорится, не суйся в воду, не зная броду. Очевидно, что этот, порою интуитивный, выбор зависит от конкретики каждой задачи. В этом выборе иногда помогает графический, наглядный и безошибочный, набросок решаемой задачи, из которого видна совместность/несовместность решаемой системы уравнений. Такие вот качели – определять/не определять совместность системы уравнений – наводят на следующие размышления:

Пусть прозвучит такая постановка задачи (не математически, но логически).

Имеется в наличии некий набор отдельных уравнений. Пока не сделан анализ об их совместности, говорить о «системе уравнений» рано.

Если такой анализ показал совместность уравнений представленного набора, то все они приобретают статус «системы уравнений» и можно уже сказать «Систему уравнений можно решать», подразумевая под этим, что хотя бы одно решение в результате мы получим.

В противном случае мы исходный набор уравнений либо оставляем без внимания, либо решаем каждое исходное уравнение данного набора как обособленное. При наличии, конечно, необходимости в этом.

Пример 6. а) Сделать анализ следующего набора уравнений

$2x + y = 4$

$4x + 2y = 5$

Для такого анализа применим любой из известных методов. Вот один из них.

$$\boldsymbol{p_1} = \frac{a1}{b1}; \qquad \boldsymbol{p_1} = \frac{2}{1}; \qquad \boldsymbol{p_1} = 2$$

$$\boldsymbol{p_2} = \frac{a2}{b2}; \quad \boldsymbol{p_2} = \frac{4}{2}; \quad \boldsymbol{p_2} = 2$$

При $\boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{p_2}$ набор уравнений считается несовместным. Интерес к нему пропадает. Или же решаем каждое из уравнений, входящих в набор, по отдельности, т.е. как обособленные.

Рассмотрим по отдельности.

Известно, что любое обособленное уравнение (кроме вида $\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{b}$) имеет множество решений. Теоретически мы можем выбрать из этого множества хотя бы одно. Но практически это сделать весьма проблематично, если совсем не невозможно. Но какой-то выход найти можно.

Начнем с <u>первого уравнения</u> 2x + y = 4

$$\boldsymbol{p} = \frac{b}{a1+a2}; \quad \boldsymbol{p} = \frac{4}{2+1}; \quad \boldsymbol{p} = \frac{4}{3}$$

Значит, $\boldsymbol{x} = \frac{4}{3}$ и $\boldsymbol{y} = \frac{4}{3}$

Проверка 2x + y = 4; $2 \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4$; $\frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$; 4 = 4

Одно из возможных решений получено.

<u>Второе уравнение</u> 4x + 2y = 5

$$\boldsymbol{p} = \frac{b}{a1+a2}; \quad \boldsymbol{p} = \frac{5}{4+2}; \quad \boldsymbol{p} = \frac{5}{6}$$

Значит, $\boldsymbol{x} = \frac{5}{6}$ и $\boldsymbol{y} = \frac{5}{6}$

Проверка 4x + 2y = 5; $4 \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} = 5$; $\frac{20}{6} + \frac{10}{6} = 5$; 5 = 5

Одно из возможных решений получено.

Бывают и аномальные уравнения, решение которых выходит за рамки данного метода. К примеру, такое уравнение

4x - 4y = 8

$$\boldsymbol{p} = \frac{b}{a1+a2}; \quad \boldsymbol{p} = \frac{8}{4-4}; \quad \mathrm{p} = \infty$$

Решение не найдено. Но можно применить и графический метод. Только следует учитывать, что результаты такого решения могут быть менее точными, чем результаты решения числового (рис.1).

Пример 7.

а) Сделать анализ следующего набора уравнений

$$3x_1 + 2x_3 = 6$$
$$2x_2 + 3x_4 = 6$$

Для такого анализа применим опробованный выше метод.

$$\boldsymbol{p_1} = \frac{a1}{a3}; \qquad \boldsymbol{p_1} = \frac{3}{2}$$

$$\boldsymbol{p_2} = \frac{a2}{a4}; \qquad \boldsymbol{p_2} = \frac{2}{3}$$

$\boldsymbol{p_1}$ и $\boldsymbol{p_2}$ не равны. Значит, набор исходных уравнений можно считать «системой уравнений», которая даёт хотя бы одно решение. Значит объявляем, что её надо решать.

Решение.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 6 \\ 2x_2 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

При такой сложной системе уравнений необходимо применить нечто неординарное.

Рассмотрим эти два уравнения как обособленные.

Уравнение $3x_1 + 2x_3 = 6$

$$\boldsymbol{p} = \frac{b}{a1+a3}; \quad \boldsymbol{p} = \frac{6}{3+2}; \qquad \boldsymbol{p} = \frac{6}{5}$$

Значит, $\boldsymbol{x_1} = \frac{6}{5}$ и $\boldsymbol{x_3} = \frac{6}{5}$

Уравнение $2x_2 + 3x_4 = 6$

$$\boldsymbol{p} = \frac{b}{a2 + a4}; \quad \boldsymbol{p} = \frac{6}{2+3}; \quad \boldsymbol{p} = \frac{6}{5}$$

Значит, $\boldsymbol{x_2} = \frac{6}{5}$ и $\boldsymbol{x_4} = \frac{6}{5}$

Если пара аргументов $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_3}$ равна паре аргументов $\boldsymbol{x_2}$ и $\boldsymbol{x_4}$, то каждый из них равен $\frac{6}{5}$. Т. е. решение таково

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{6}{5}; \quad \boldsymbol{x_2} = \frac{6}{5}; \quad \boldsymbol{x_3} = \frac{6}{5}; \quad \boldsymbol{x_4} = \frac{6}{5}$$

Данная система уравнений примечательна тем, что неизвестные можно найти как решением её обособленных (по отдельности) уравнений, так и в составе системы уравнений.

Системное решение уравнений приводится лишь в графическом исполнении (см. рис. 2).

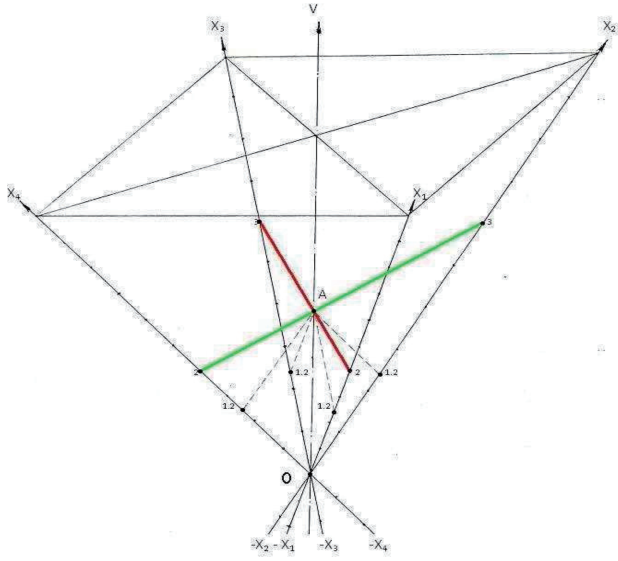

Рис.2

Ниже приведено несколько примеров, подтверждающих это.

<u>Пример 8</u>. Исследовать набор уравнений на предмет их причастности к системе из двух уравнений с четырьмя неизвестными, т.е. определить их совместность:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 6, & \text{красная прямая} \\ 2x_2 + 3x_4 = 6. & \text{зеленая прямая} \end{cases}$$

Глядя на данную систему уравнений может показаться, что в данном случае налицо его несовместность, т.к. в первое уравнение можно подставлять любые, соответствующие ему, значения x_1 и x_3 (к примеру, $x_1 = 1.0$ и $x_3 = 1.5$), также и во второе уравнение можно подставлять любые, соответствующие ему, значения x_2 и x_4, (к примеру, $x_2 = 6.0$ и $x_4 = -2.0$), т.е. складывается впечатление, что уравнения данной системы могут решаться только как обособленные. Но рисунок 2 показывает, что прямые, представляющие образы уравнений, пересекаются в т. ***A***. Значит система уравнений совместна и решение единственное.

$$x_1 = 1.2; \quad x_2 = 1.2; \quad x_3 = 1.2; \quad x_4 = 1.2$$

<u>Пример 8</u>. Определить совместность следующего набора из двух уравнений с четырьмя неизвестными:

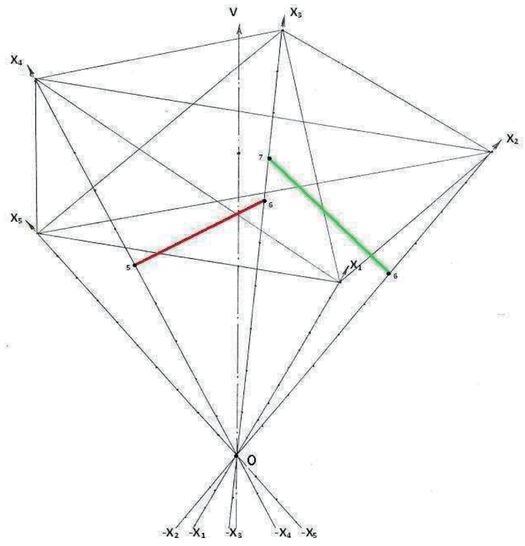

Рис.3

$$\begin{cases} 5x_3 + 6x_4 = 30, & \text{красная прямая} \\ 7x_2 + 6x_3 = 42. & \text{зеленая прямая} \end{cases}$$

Глядя на этот набор уравнений, появляется слабая надежда на их совместность. Но из рис.3 видно, что это не так: прямые, представляющие собой образы уравнений, не пересекаются. Значит, система не имеет ни одного решения, т.е. этот набор состоит из несовместных уравнений. И называть его системой уравнений нельзя.

Пример 9. Определить совместность следующего набора из двух уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 = 6 & \text{красная прямая} \\ 3x_1 + 3x_3 + 4x_5 = 12 & \text{зелёный контур} \end{cases}$$

На рис.4 показаны:

Красная прямая (6:3) – образ первого уравнения, Зелёный контур (4:4:3) – образ второго уравнения,

Отрезок **AB** – пересечение красной прямой с зелёным контуром, Точки **A** и **B** принадлежат одновременно плоскости, ограниченной зелёным контуром, красной прямой и координатной плоскости $\boldsymbol{0{:}X_2{:}X_4}$. Значит, этот набор уравнений является совместным и есть возможность найти хотя бы два (в точках **A** и **B**) решения прямо из рисунка. На рис.4 эти решения не отображены, а их параметры таковы:

$x_1 = 1.5$; $x_2 = 2.5$; $x_3 = 2.5$; $x_4 = 1.75$; $x_5 = 0$ (т. **A**)

$x_1 = 0$; $x_2 = 1.2$; $x_3 = 2.2$; $x_4 = 2.4$; $x_5 = 1.35$ (т. **B**)

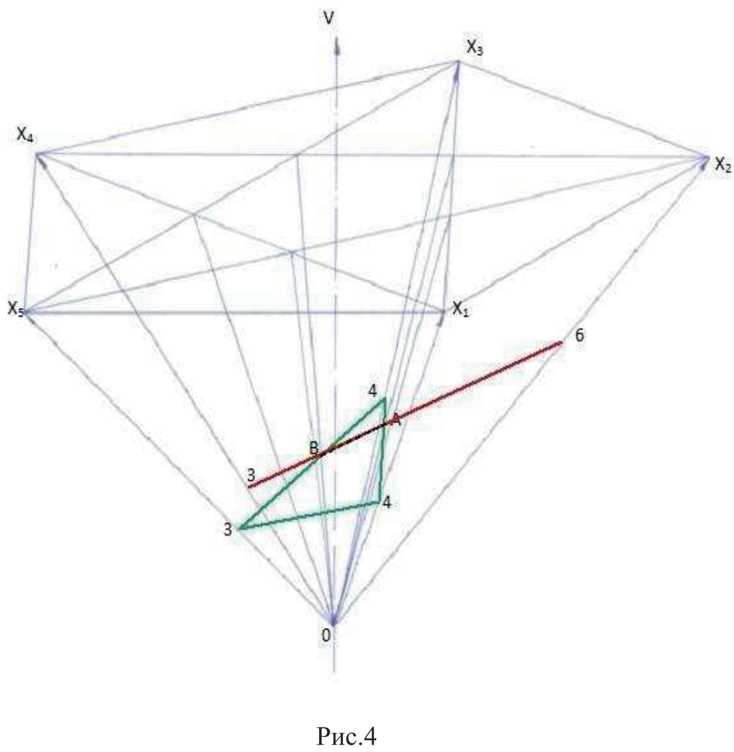

Рис.4

__Пример 10__. Определить совместность следующего набора из двух уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_4 = 10 & \text{красная прямая} \\ 3x_1 + 2x_3 + 6x_5 = 12 & \text{зелёный контур} \end{cases}$$

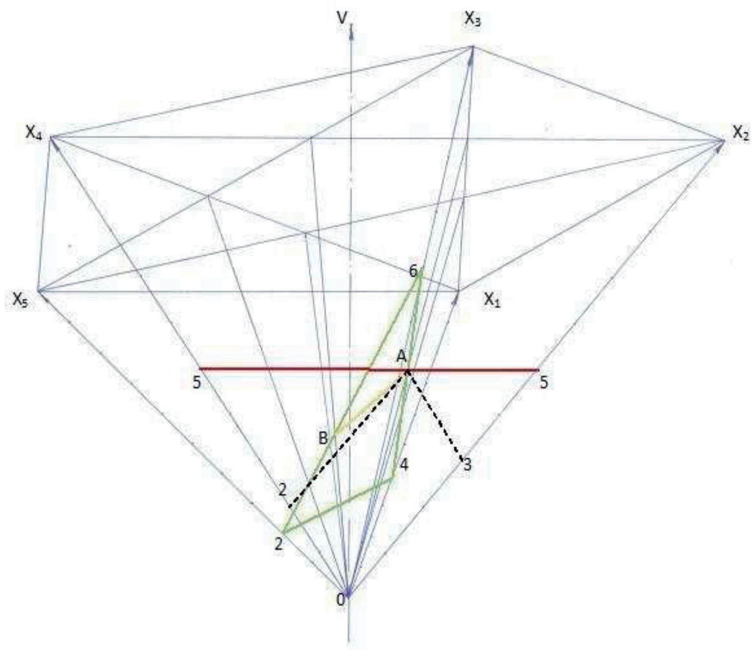

Рис.5

На рис.5 показаны:

Красная прямая (5:5) – образ первого уравнения,

Зелёный контур (4:6:2) – образ второго уравнения,

Отрезок ***AB*** – пересечение зелёного контура с координатной плоскостью ***$0:X_2:X_4$.*** , точка ***A*** принадлежит одновременно плоскости, ограниченной зелёным контуром, красной прямой и координатной плоскости ***$0:X_2:X_4$.*** Значит, этот набор уравнений является совместным и есть возможность найти единственное (в точке ***A***) решение прямо из рисунка. На рис.4 это решение отображено частично, а все его параметры таковы:

$$\boldsymbol{x_1} = 2; \quad \boldsymbol{x_2} = 3; \quad \boldsymbol{x_3} = 2; \quad \boldsymbol{x_4} = 2; \quad \boldsymbol{x_5} = 0 \qquad (\text{т. } \boldsymbol{A})$$

<u>Пример 11</u>. Определить совместность следующего набора из двух уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_4 = 9 & \text{красная прямая} \\ 3x_1 + 2x_3 + 6x_5 = 12 & \text{зелёный контур} \end{cases}$$

На рис.6 показаны:

Красная прямая (4.5:4.5) – образ первого уравнения,

Зелёный контур (4:6:2) – образ второго уравнения,

Отрезок ***AB*** – пересечение зелёного контура с координатной плоскостью ***0:X₂:X₄.*** Точка ***A*** пронизывает плоскость, образованную зелёным контуром, и принадлежит одновременно этой плоскости, красной прямой и координатной плоскости $\boldsymbol{0{:}X_2{:}X_4}$.

Значит, этот набор уравнений является совместным и есть возможность найти единственное (в точке ***A***) решение прямо из рисунка. На рис.4 это решение отображено частично, а все его параметры таковы:

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{6}{5}; \quad \boldsymbol{x_2} = 2.25; \quad \boldsymbol{x_3} = \frac{6}{5}; \quad \boldsymbol{x_4} = 2.25; \quad \boldsymbol{x_5} = 1 \qquad (\text{т. } \boldsymbol{A})$$

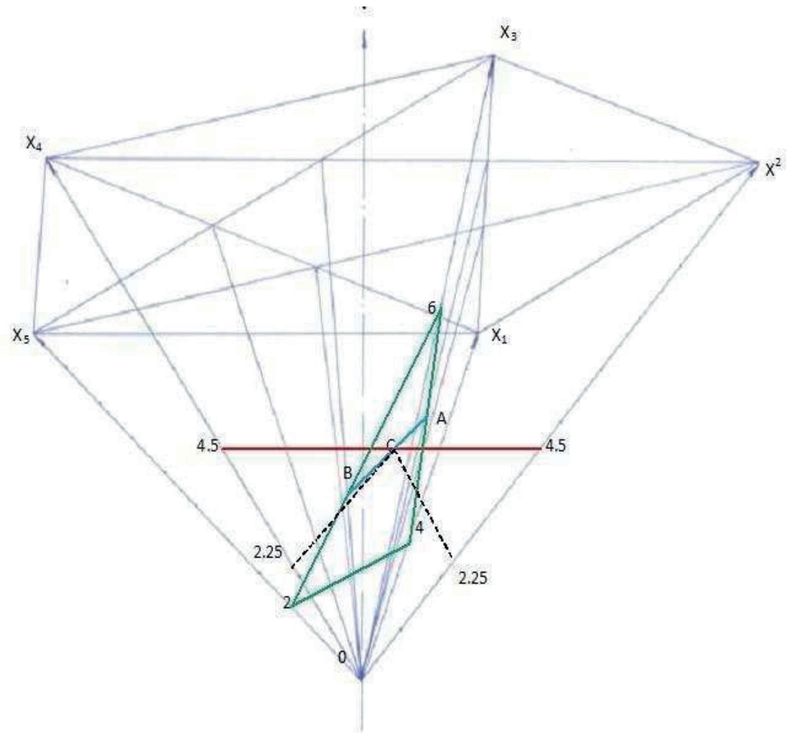

Рис.6

Решение систем линейных алгебраических уравнений бисекторным методом

Решением системы уравнений называется упорядоченный набор чисел (значений переменных), при подстановке которых вместо переменных каждое из уравнений обращается в верное равенство. Значения неизвестных, при которых это равенство достигается, называются *решениями.*

На рис.1 биссектриса ОМ, рассекающая на два сектора угол и две части образ уравнения (АВ) с двумя неизвестными, даёт возможность найти решение обособленного уравнения. Аналогично, в системах уравнений с двумя и более уравнениями и неизвестными наличие дополнительной секущей плоскости, которая рассекает линию пересечения плоскостей-образов исходных уравнений, также даёт возможность найти хотя бы одно решение среди их множества.

Пример 12 Решить систему уравнений (условившись, что она после проверки оказалась совместной)

$$\begin{cases} x + \frac{5}{3}y + \frac{10}{3}z = 10, \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z = 2 \end{cases}$$

Введём дополнительное уравнение вида (возьмём $\boldsymbol{b} = 5$)

$$x + y + z = b$$

в котором все коэффициенты равны единице, и $b > 0$. Тогда полученная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x + \frac{5}{3}y + \frac{10}{3}z = 10, \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z = 2, \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

Её графическая интерпретация — рис.7

Определить величины неизвестных $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$, т. е. найти координаты точки $\boldsymbol{A}$.

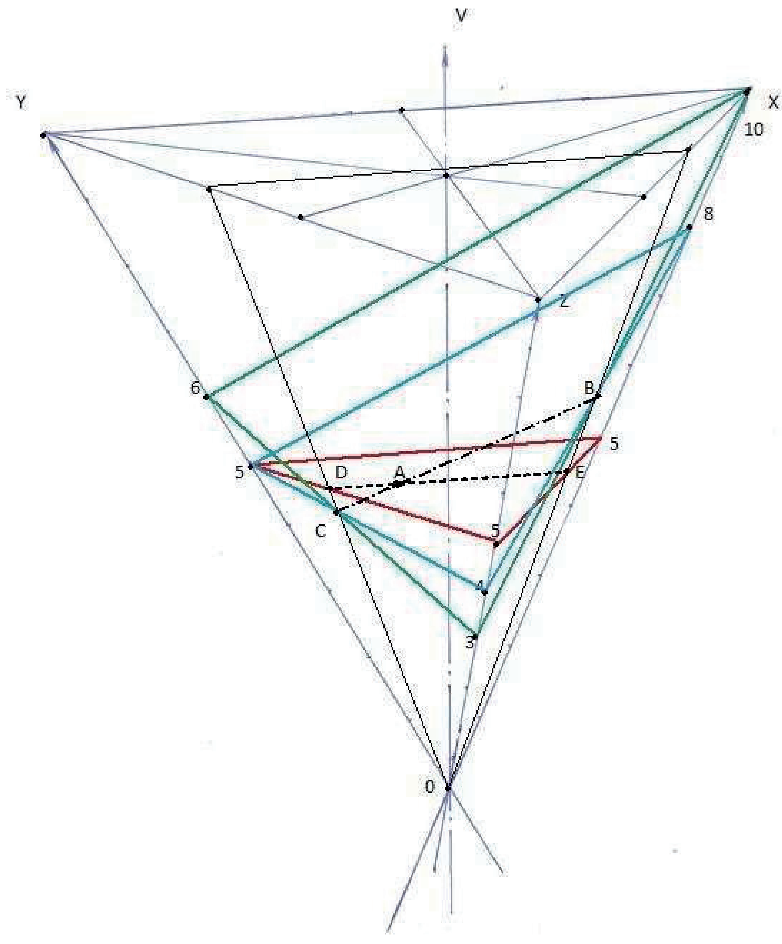

Рис.7

На рис.7 изображено:

Зелёный контур (10:6:3) — образ первого уравнения
Зелёный контур (8:5:4) — образ второго уравнения
Красный контур (5:5:5) — образ дополнительного уравнения
Прямая ***BC*** – линия пересечения образов первого и второго уравнений
Точка ***A*** – точка прохода линии ***BC*** сквозь красную секущую плоскость (5:5:5).
Прямая ***DE*** — вспомогательная линия, служащая для определения местоположения точки А.

Решение (метод подстановки).

$$\begin{cases} x + \frac{5}{3}y + \frac{10}{3}z = 10, \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{5}y + \frac{1}{2}z = 2, \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

1. Вычитаем из первого уравнения третье (1-3). Получаем $2y + 7z = 15$ (I)
2. Преобразуем второе уравнение — умножим его на 4.

Получим $x + \frac{8}{5}y + 2z = 8$ (II)

3. Вычитаем из преобразованного второго уравнения третье.

Получим $\frac{3}{5}y + z = 3.$ (III)

Из него определяем $z = 3 - \frac{3}{5}y$ (IV)

4. В уравнение (I) подставляем уравнение (IV).

Получим $y = \frac{30}{11}$ (V)

5. В уравнение (IV) подставить значение (V).

Получим $z = \frac{15}{11}$ (VI)

6. В первое уравнение подставляем значения (V) и (VI).

$$x + \frac{5}{3} \cdot \frac{30}{11} + \frac{10}{3} \cdot \frac{15}{11} = 10$$

$$x = 10 - \frac{150}{33} - \frac{150}{33}$$

$$x = \frac{330}{33} - \frac{150}{33} - \frac{150}{33}$$

$$x = \frac{30}{33}$$

$$x = \frac{10}{11} \qquad \text{(VII)}$$

Автор ответственно заявляет, что проверка показала правомочность значений неизвестных, а именно $\boldsymbol{x} = \frac{10}{11}$, $\boldsymbol{y} = \frac{30}{11}$ и $\boldsymbol{z} = \frac{15}{11}$. Поэтому она, как формальный акт, опускается.

На рис.8 показано графическое (в планиметрии) решение этого же примера с определением величин неизвестных.

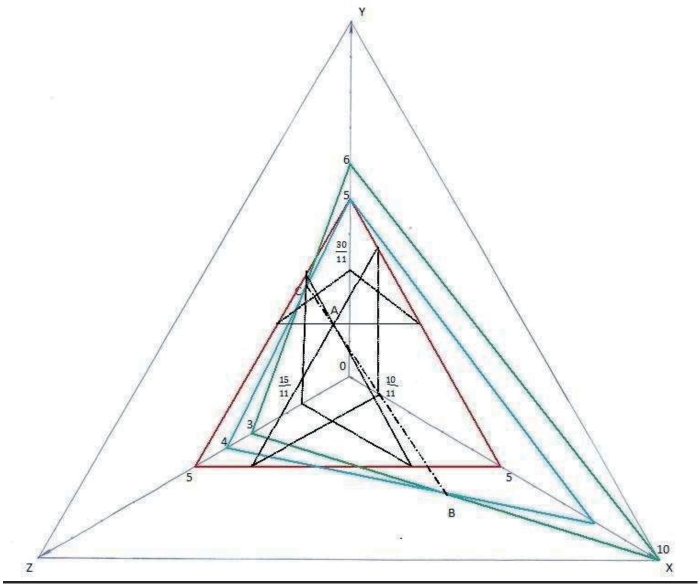

Рис.8

Пример 13.

Решить систему уравнений (условившись, что она после проверки оказалась совместной)

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Введём дополнительное уравнение вида (возьмём b = 5)

$x_2 + x_3 + x_4 = b$,

в котором все коэффициенты равны единице, и $b > 0$. Тогда получившаяся система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

Её графическая интерпретация — рис.9

Определить величины неизвестных $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$, т. е. Найти координаты точки А.

На рис.9 изображено:

Зелёный контур (6:6:3) — образ первого уравнения
Голубой контур ($-\frac{4}{3}$:2:4) — образ второго уравнения
Красный контур (5:5:5) — образ дополнительного уравнения

Прямая BC – линия пересечения образов первого и второго уравнений

Точка А – точка прохода линии BC сквозь секущую плоскость (5:5:5).

Прямая DE — вспомогательная линия, служащая для определения местоположения точки А.

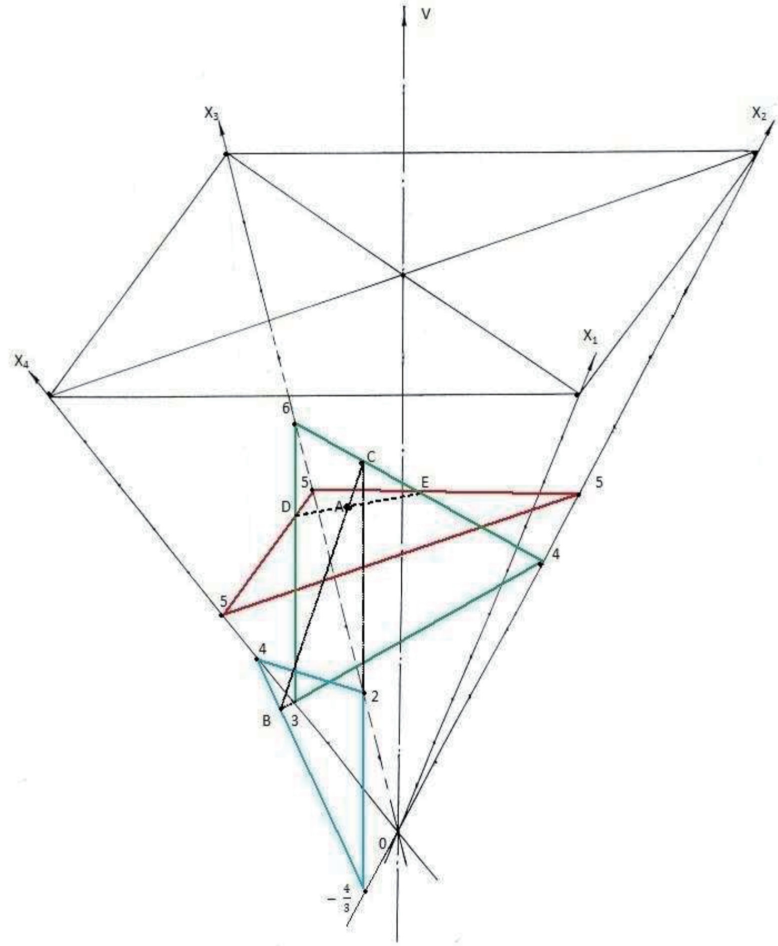

Рис.9

Решение (метод подстановки).

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

1. Преобразуем первое уравнение — умножим его на 2.

   Получим $3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12$

2. Просуммируем первое и второе уравнения.

   Получим $6x_2 + 3x_4 = 8$ (I)

3. Из (I) определяем $x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}x_4$ (II)

4. Вычтем из первого уравнения третье.

   Получим $\frac{1}{2}x_2 + x_4 = 1$ (III)

5. В уравнение (III) подставим уравнение (II). Получим $x_4 = \frac{4}{9}$ (IV)

6. В уравнение (II) подставим значение (IV).

   Получим $x_2 = \mathbf{\frac{10}{9}}$ (V)

7. В первое уравнение подставляем значения (IV) и (V).

   Получим $x_3 = \mathbf{\frac{31}{9}}$ (VI)

Автор ответственно заявляет, что проверка показала правомочность значений неизвестных, а именно $\boldsymbol{x_2} = \mathbf{\frac{10}{9}}$, $\boldsymbol{x_3} = \mathbf{\frac{31}{9}}$ и $\boldsymbol{x_4} = \mathbf{\frac{4}{9}}$. Поэтому проверка, как формальный акт, опускается.

На рис.10 показано графическая (в планиметрии) интерпретация этого же примера.

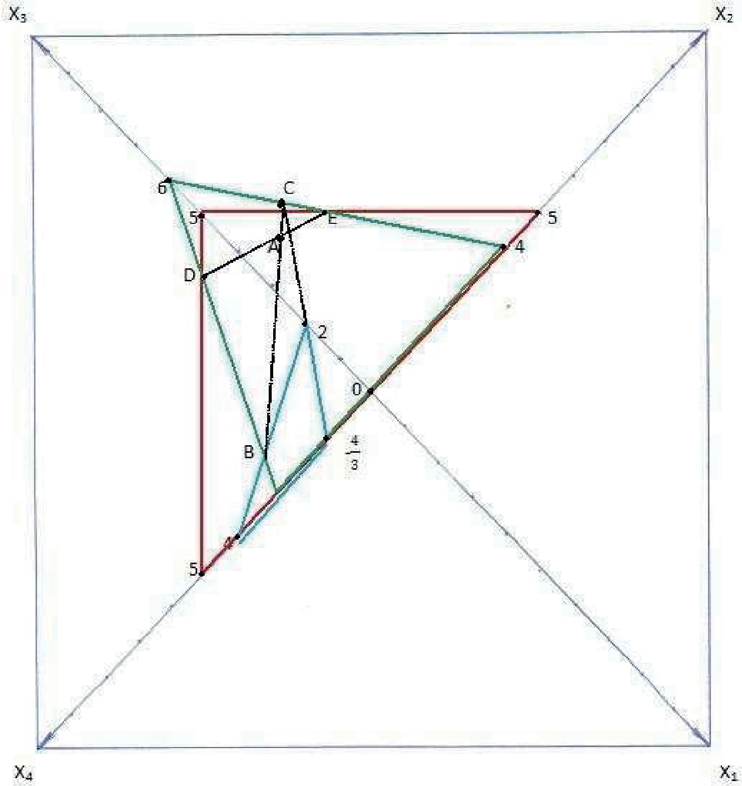

Рис.10

Таким образом, введение в решение системы уравнений понятия секущей плоскости, как аналог биссектрисы, позволяет определять совместность системы уравнений и решать их как числовым методом, так и графическим.

3. Заключение

В заключение необходимо отметить, что графическому методу определения совместности и непосредственного решения системы линейных алгебраических уравнений в определённой степени свойственна сложность в исполнении рисунков, но несомненно то, что он придаёт решению системы уравнений наглядность и надёжность в определении совместности. Может быть, в будущем, будет создана специальная программа, которая не только автоматически делает рисунок при этом, но и решает систему уравнений с указанием точных величин найденных неизвестных.

И, возможно, наступит необходимость в практическом применении бисекторного метода в решении не только систем линейных алгебраических уравнений, но и уравнений просто обособленных.

4. Глоссарий

Ввиду того, что данная работа в основном использует терминологию уже известную или взятую из Приложения 1 (а оно отправляет читателя на специальный сайт) автор считает, что необходимость в этой части работы отсутствует.

5. Приложения

5.*1. Приложение 1. Основы построения реальной многомерной произвольно-угольной системы координат*

Примечание: Данное приложение основано на работе автора «Реальная многомерная произвольно-угольная система координат»), размещённая на его сайте **optimat.ucoz.ru**. Поэтому для более подробного ознакомления с данной темой читатель может к нему не только обратиться непосредственно, но и скачать бесплатно.

В Декартовой прямоугольной системе координат точка $\boldsymbol{A}$ определяется тремя координатами - $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ и $\boldsymbol{x_3}$. Координата $\boldsymbol{x_1}$ называется абсциссой (лат. Abscissa – отрезок), координата $\boldsymbol{x_2}$ — ординатой (лат. Ordinates – расположенный в порядке), $\boldsymbol{x_3}$ — аппликатой (лат. Applicata – буквально приложенная) точки $\boldsymbol{A}$.

Но при рассмотрении вопроса присвоения имен координатам $\boldsymbol{x1}$, $\boldsymbol{x2}$, $\boldsymbol{x3}$, $\boldsymbol{x4}$, $\boldsymbol{x5}$, $\boldsymbol{x6}$, $\boldsymbol{x7}$ и т.д. в многомерной произвольно-угольной системе координат трудно себе представить, какими аналогичными именами стоило бы их назвать, т.к. логика преемственности вышеупомянутых названий отсутствует. Поэтому автор признал целесообразным введение новых, тоже латинских, имен для координат точки в многомерной произвольно-угольной системе координат, исходя из их индексации. А именно:

$\boldsymbol{x_1}$ – (лат. *Prima* – прима),
$\boldsymbol{x_2}$ - (лат. *Secundo* - секунда),
$\boldsymbol{x_3}$ - (лат. *Tertia* – терция),
$\boldsymbol{x_4}$ - (лат. *Quadrantem* – кварта),
$\boldsymbol{x_5}$ - (лат. *Quinto* - квинта),
$\boldsymbol{x_6}$ – (лат. *Sexto* – секста),
$\boldsymbol{x_7}$ – (лат. *Septimo* – септима),
$\boldsymbol{x_8}$ - (лат. *Octava* - октава),
$\boldsymbol{x_9}$ - (лат. *Nona* - нона),
$\boldsymbol{x_{10}}$ - (лат. *Decima* – децима), и т.д.

Построение реальной многомерной произвольно-угольной системы координат *<u>на плоскости</u>*

Произвольно-угольная система координат на плоскости образуется так же, как и Декартова прямоугольная системы координат на плоскости. Отличие состоит лишь в том, что она образуется между двумя осями координат $\boldsymbol{OX_1}$ и $\boldsymbol{OX_2}$ не взаимно перпендикулярными, как это изображено, к примеру, на рисунке 11, а расположенными под произвольным углом, отличным от 0, 90 и 180 градусов (рис. 12).

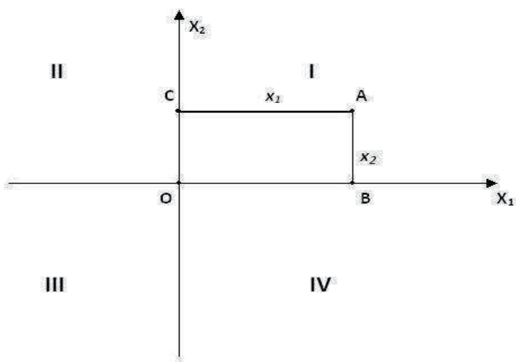

Рис. 11

Построим произвольно-угольную систему координат на плоскости, представив себе при этом, что во всех точках сочленений всех линий друг с другом такой же Декартовой системы координат – шарниры, повернем вокруг

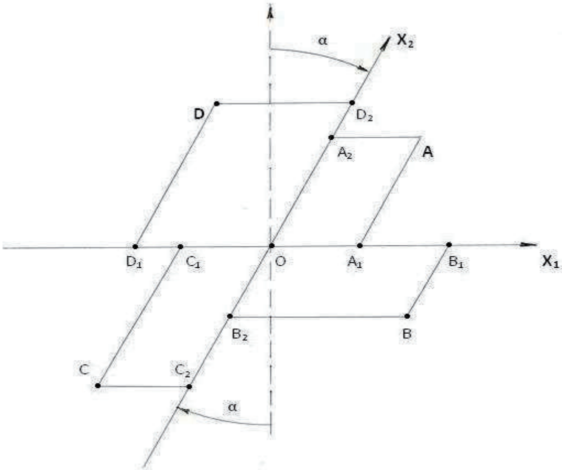

Рис.12

начала координат, т.е. точки ***O***, ось X_2 , к примеру, по часовой стрелке на произвольный угол в диапазоне $0 < \alpha < 90$ градусов, произвольно уменьшив тем самым прямой угол X_1OX_2 на величину α. Получим в результате произвольно – угольную систему координат на плоскости (рис.12).

По существующим правилам современной школьной геометрии длина ни одного из отрезков, характеризующих координаты точек ***A, B, C*** и ***D***, не изменится, т.е. не изменятся и сами координаты этих точек. Значит, в системе координат на плоскости при изменении угла между её координатными осями координаты находящихся в ней точек не меняются.

Вывод: В произвольно-угольной системе координат на плоскости с изменением угла (в пределах $0 < \alpha < 90$ градусов) расположения координатных осей друг по отношению к другу координаты точки не меняются, т.е. система координат на плоскости хотя бы в теоретическом смысле может быть не обязательно прямоугольной.

Построение реальной многомерной произвольно-угольной системы координат *<u>в пространстве</u>*

Авторское развитие

Развивая Декартову прямоугольную систему координат в пространстве, введем понятие “вектора направленности”, т.е. вектора ***V***, проходящего из точки начала координат (т. ***O***) через точку ***A***, координаты которой ***x1, x2*** и ***x3*** равны друг другу (рис.13). В результате несложных вычислений, которые здесь не приводятся, видно, что все три координатные плоскости Декартовой системы координат по отношению к вектору ***V*** расположены под одинаковыми углами, равными 30 градусам.

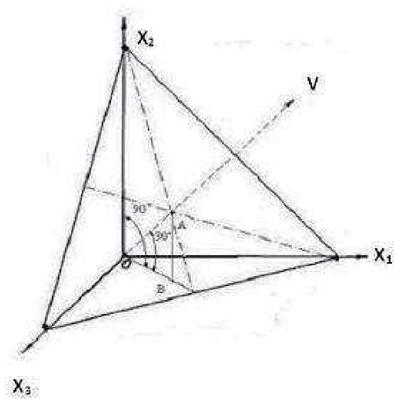

Рис.13

Ее положительная полуось проходит через положительный сектор, точка в котором имеет координаты только равные нулю или больше нуля, а отрицательная – через отрицательный сектор, точка в котором имеет координаты только равные нулю или меньше нуля. Назовем этот угол ***начальным.***

Образно трехмерную произвольно-угольную систему координат можно представить как Декартову прямоугольную систему координат, но с начальным углом в диапазоне $0 < \beta < 90$. Примечательно только, что в этот диапазон входит и сама Декартова прямоугольная система координат, т.е. отличие состоит лишь в том, что она образуется между тремя помимо случая взаимно перпендикулярными осями координат ***OX***, ***OY*** и ***OZ***, как и тремя осями координат ***OX, OY*** и ***OZ***, расположенными по отношению к вектору направленности под произвольными, также равными между собой и отличными от 30 градусов, начальными углами.

Очевидно, что Декартова прямоугольная система координат представляет собой частный случай многомерной произвольно- угольной системы координат.

Для большей же наглядности целесообразно порядок построения произвольно-угольной системы координат показать пошагово, с помощью серии простых рисунков (рис.14 ÷ рис.25).

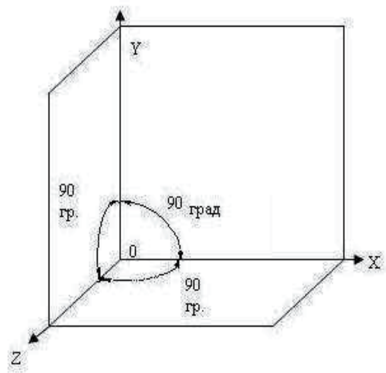

Рис.14

В сравнении с трёхмерной Декартовой системой координат (рис.14) построим трёхмерную произвольно-угольную систему координат.

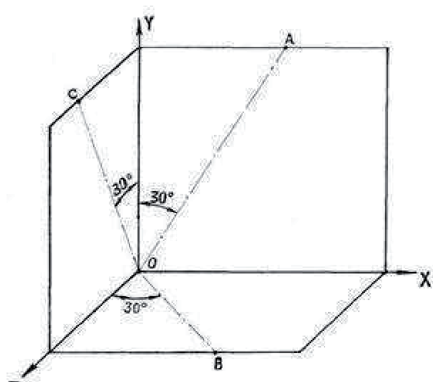

Рис.15

Уменьшим прямые углы ***YOX,YOZ*** и ***ZOX*** на 30, к примеру, градусов каждый, обозначив это уменьшение отрезками ***OA, OC*** и ***OB*** соответственно (рис.15) и проведем через них координатные плоскости новой системы (рис.16).

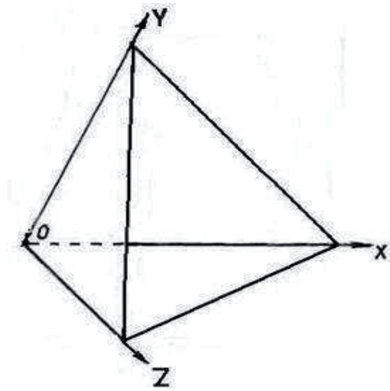

Рис. 16

На рисунке 16 изображена готовая произвольно-угольная трехмерная

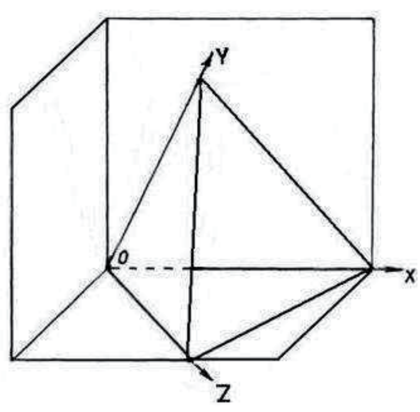

Рис.17

система координат. Для сравнения полученной трёхмерной произвольно-угольной системы координат с Декартовой трехмерной же прямоугольной системой координат встроим первую в рамки второй (рис.17).

Используя те же методы определения координат точки ***A***, как и в произвольно-угольной системе координат, отобразим точку *A* с её координатами в произвольно-угольной системе координат (рис.18).

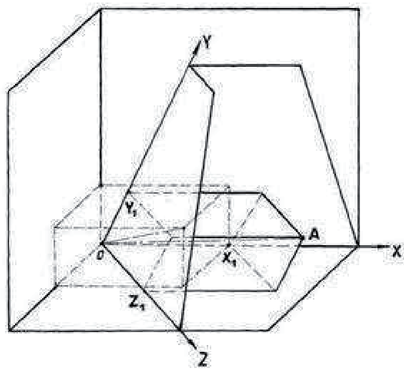

Рис.18

Из рисунка 16 видно, что параллелепипед, полученный путём ограничения пространства координатными плоскостями и введёнными через точку ***A*** параллельными им плоскостями, вытянут в сторону точки ***A***, т.е. произошла деформация параллелепипеда в сторону, продиктованную устройством трёхмерной произвольно-угольной системы координат. С точки зрения стороннего наблюдателя точка ***A*** поменяла своё положение. Но, если наблюдатель находится в точке ***A***, в любой из двух систем он наблюдает одни и те же координаты точки ***A***. Для большей и разносторонней наглядности приведём макеты трёхмерной произвольно-угольной системы координат (рисунки 19 и 20).

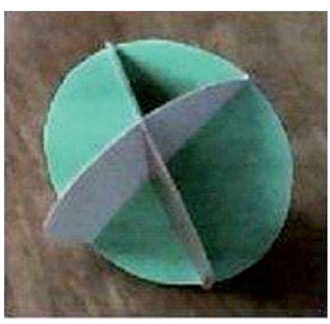

Рис.19

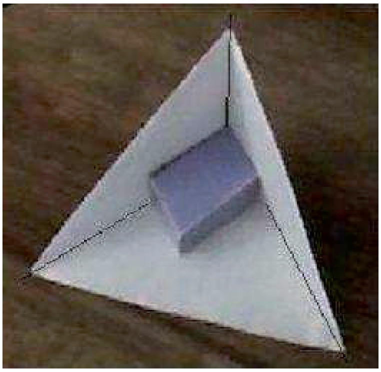

Рис.20

Говоря иначе, трёхмерная произвольно-угольная система координат была построена на основе трёхмерной Декартовой системы координат путём уменьшения начальных углов на какую-то определённую величину $\alpha = 30°$.

Теперь, после знакомства с принципами построения произвольно-угольной системы координат в пространстве, в частности – трехмерном, можно дополнить утверждение, что начальный угол β должен быть в пределах $0 < \beta < 90$ градусов, тем, что при $\beta = 0$ градусов координатные оси произвольно-угольной системы координат вырождаются в одну прямую – линию пересечения всех координатных плоскостей, которая при этом сливается с вектором направленности,

- при $\beta = 90$ градусов координатные плоскости сливаются в одну плоскость, расположенную перпендикулярно вектору направленности, а координатные оси при этом сливаются, утрачивая свое назначение, с этой плоскостью.

Теперь можно сформулировать

<u>Общие принципы построения многомерной произвольно-угольной системы координат</u>:

- проводим вектор направленности;

- задаёмся начальным углом $0 < \beta < 90$;

- отмечаем на векторе направленности точку начала координат;

- через неё (под начальным углом к векторной оси) проводим координатные плоскости.

Вообще говоря, эти принципы построения подходят и для Декартовой системы координат, у которой начальный угол установлен жестко равным 30 градусам (рис.11).

До этих пор мы рассматривали системы координат в односекторном представлении, т.е. все построения велись в секторе, где точка ***A*** имеет лишь положительные координаты.

Достроим полученную трёхмерную произвольно-угольную систему координат недостающими секторами и проведём через центр получившейся фигуры вектор направленности ***V***, т.е. прямую, проходящую через начало координат (точку ***O***), каждая точка которой находится на равном расстоянии от каждой координатной плоскости, и всей фигуре придадим вертикальное положение, т.е., сообразуясь с вертикальным положением векторной оси *V* (рис.19).

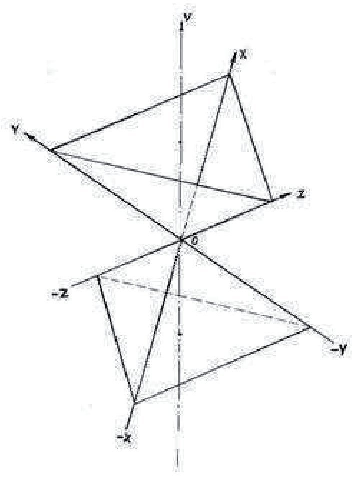

Рис.21

На рисунках 22,23 и 24 представлены макеты четырехмерной, пятимерной и шестимерной произвольно-угольных систем координат соответственно, построенных аналогичным образом.

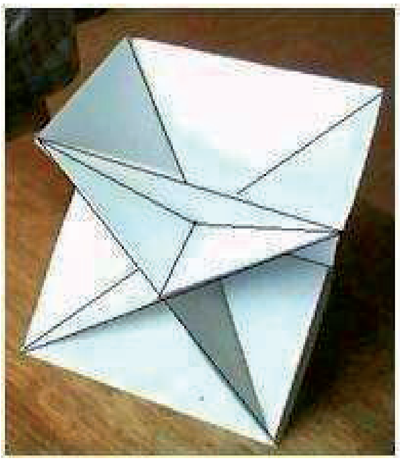

Рис.22

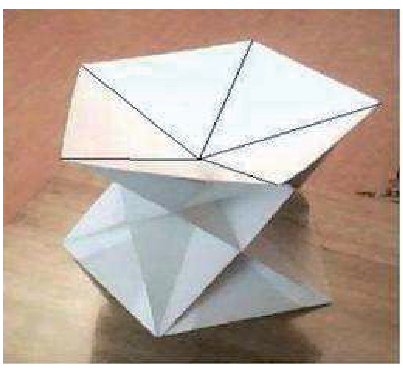

Рис.23

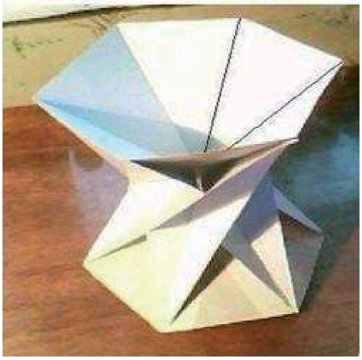

Рис.24

5.2. Приложение 2. Определение координат точки на плоскости и в пространстве произвольно-угольной системы координат

Определение координат точки <u>*на плоскости*</u> ***произвольно-угольной системы координат.***

Определение координат точки в произвольно-угольной системе координат на плоскости осуществляется так же, как и в Декартовой прямоугольной системе координат (рис.25), т.е. положение точки ***A*** на плоскости определяется двумя координатами - x_1 и x_2 , к примеру. Координата x_1 равна длине отрезка OA_1, координата x_2 — длине отрезка OA_2 в выбранных единицах измерения. Отрезки OA_1 и OA_2 определяются линиями, проведёнными из точки ***A*** параллельно осям OX_2 и OX_1 соответственно. Координата x_1 называется примой (лат. *Prima* – первый), координата x_2 — секундой (лат. *Secundo* – второй) точки ***A***.

$A(x_1, x_2)$

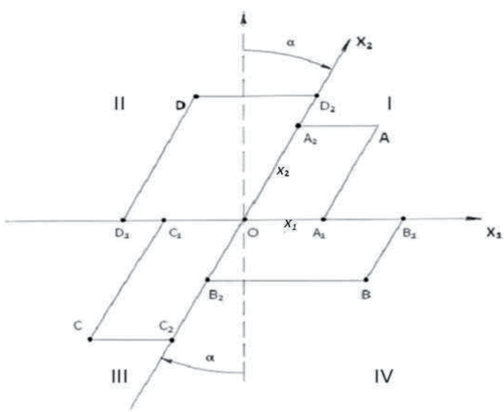

Рис.25

Если точка ***A*** лежит в координатном углу I, то она имеет положительные приму и секунду.

Если точка ***A*** лежит в координатном углу II, то – отрицательную приму и положительную секунду.

Если точка ***A*** лежит в координатном углу III, то она имеет отрицательные приму и секунду.

Если точка ***A*** лежит в координатном углу IV, то – положительную приму и отрицательную секунду.

Так определяются координаты на плоскости произвольно-угольной системы координат.

Определение координат точки в трехмерном ***пространстве произвольно-угольной системы координат.***

Определение координат точкив в трехмерном пространстве произвольно-угольной системы координат осуществляется так же, как и в трехмерном пространстве Декартовой прямоугольной системы координат.

Начертание рисунка произвольно-угольной трехмерной системы координат для определения координат находящейся в ее пространстве координатной точки ***A*** можно осуществлять как в планиметрическом (рис.26), так и в аксонометрическом виде. В данном же случае выбрано более простое и наглядное *планиметрическое* начертание рисунков.

На рис.26 секущие плоскости ***KLM, BCD*** и ***EFG***, проходящие параллельно соответствующим координатным плоскостям и пересекающие при этом определенные координатные оси X_1, X_2 и X_3, указывают тем самым на координаты $x_1 = OM$, $x_2 = OD$ и $x_3 = OG$ соответственно. Координата x_1 называется примой (лат. *Prima* – первый, координата x_2 — секундой (лат. *Secundo* – второй), координата x_3 — терцией (лат. *Atertia* –третий) точки ***A.***

Записывают так: $A\ (x_1, x_2, x_3)$

Аналогичным образом определяются координаты точки *A*, расположенной в четырехмерном, пятимерном, шестимерном и т.д. пространстве произвольно-угольной системы координат.

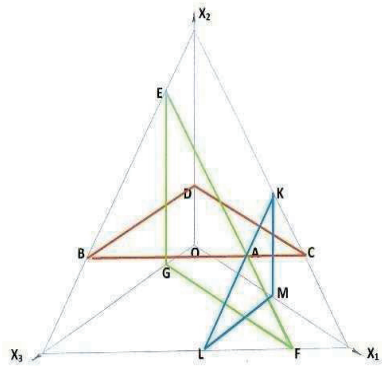

Рис.26 - определение координат точки ***A*** плоскостным методом

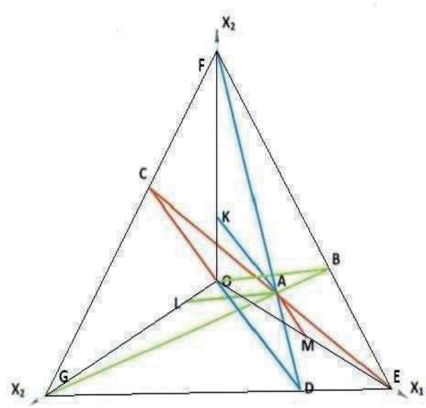

Рис.27 – определение координат точки ***A*** лучевым методом

5.3. Приложение 3. Методика построения образов уравнений

Построение (в аксонометрии) Декартовой системы координат (рис.28),

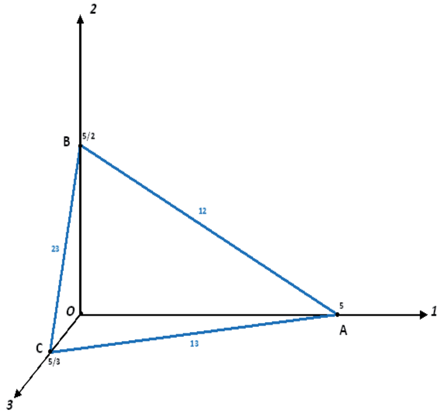

Рис.28

Построение в пределах системы координат образов уравнений: в каждом уравнении величину, получившуюся от деления его свободного члена на коэффициент одного из неизвестных (при условии, что остальные неизвестные раны нулю), отмечаем на соответствующей оси координат, а эти отметки соединяем друг с другом. В качестве примера, на рис.28 приведён образ уравнения $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5.$

Пусть $\boldsymbol{x_1} = 0$ и $\boldsymbol{x_2} = 0$. Тогда $\boldsymbol{x_3} = \frac{5}{3}$. На оси $\boldsymbol{x_3}$ отмечаем точку ***C***, координата которой по оси ***3*** равна $\frac{5}{3}$. (Причём, по правилам построения системы координат в аксонометрии абсолютная величина координаты для правильного восприятия рисунка и получения точных координат точки решения задачи должна быть – по линейке – в два раза меньше, чем $\boldsymbol{x_3} = \frac{5}{3}$, т.е. она должна быть равна $\boldsymbol{x_3} = \frac{5}{6}$).

Пусть $\boldsymbol{x_1} = 0$ и $\boldsymbol{x_3} = 0$. Тогда $\boldsymbol{x_2} = \frac{5}{2}$. На оси $\boldsymbol{x_2}$ отмечаем точку B, координата которой по оси $\boldsymbol{2}$ равна $\frac{5}{2}$.

Соединяем отмеченные координатные точки прямыми. Получили контур – образ уравнения.

Список литературы

1. Общий курс высшей математики для экономистов:

Учебник / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2005. – 656 с. – (Высшее образование). С. 5 – 97, 516 -643.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: Учеб. Пособие для вузов / Кремер Н.Ш., Тришин И.М., Путко Б.А. и др.; Под ред. Проф. Н.Ш.Кремера. – М., ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 423 с. С. 6 – 46, 54-56.

3. Баканов М.И., Мельник М.В., Шеремет А.Д. Теория экономического анализа: Учебник. / Под ред. М.И. Баканова. – 5 изд., перераб. И доп. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 536 с.: пл. С. 48 – 55, 504 – 513.

4. “Курс начертательной геометрии”, В.О. Гордон, М.А. Семенцов–Огиевский. М. 1971

5. Internet resourse: http\\

6. www.ru.wikipedia.org