Задача коммивояжёра симметричная

Контурный метод

Вступление

Данный метод даёт возможность простым построением контура передвижения, его проверки и коррекции с целью получения оптимального маршрута.

Постановка задачи

Имеется N городов, расстояния (стоимость проезда, расход горючего на дорогу и т.д.) между которыми известны и которые коммивояжер должен обойти с минимальными затратами. При этом на его маршрут накладываются следующие ограничения:

- маршрут должен быть замкнутым, то есть коммивояжер должен вернуться

в тот же город, из которого он начал свое движение;

- коммивояжер должен обойти обязательно все города;
- каждый из городов коммивояжер должен посетить только один раз.

Для расчета затрат существует матрица условий, содержащая затраты на переход из каждого города в каждый, при этом считается, что можно перейти из любого города в любой, кроме одноименного (в исходной матрице это ограничение отмечено дефисами, расположенными по диагонали).

$$C = \{c_{ij}\},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$$

Если затраты на переезд между каждой парой городов не зависят от направления движения, то задача называется ***симметричной***, в противном случае – ***асимметричной***.

Целью решения является нахождение маршрута, удовлетворяющего всем условиям и при этом имеющего минимальную сумму затрат.

Известны затраты (стоимостные, временные, расстояния) на переезд между i – м и j – м городами, которые заданы в виде матрицы.

В качестве переменных выбираются элементы матрицы переездов:

$$X = \{x_{ij}\},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$$

Пусть x_{ij} может принимать значения, равные 1 или 0, т.е.

$x_{ij} = 1$ - переезд из i - го города в j - ый включается в маршрут;

$x_{ij} = 0$ - не включается.

$$\begin{cases} z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \to \min \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n};\ \text{при}\ i = j \quad x_{ij} = 0 \qquad \text{(a)} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n};\ \text{при}\ i = j \quad x_{ij} = 0 \qquad \text{(b)} \\ x_{ij} = \{1,0\} \end{cases}$$

Ограничения группы (a) задают условие: в каждый город коммивояжер въезжает только один раз. Ограничения группы (b) задают условие: из каждого города коммивояжер выезжает только один раз. При решении задачи также необходимо учесть дополнительное условие, не допускающее появление неполных замкнутых циклов (см. рис.2).

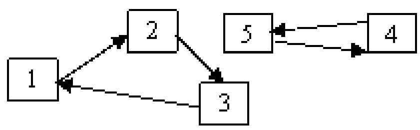

Рис.2

***__Алгоритм решения__*:**

Для получения начального опорного плана используем любой из известных методов. К примеру, метод минимальной стоимости.

1. Составляем начальное опорное решение методом минимальной стоимости с учётом описанных выше ограничений.

2. С учётом ограничений, представленных в постановке задачи, проверяем опорный план на оптимальность контурным методом, суть которого состоит в следующем (для удобства описания алгоритма в исходной матрице

отметим – назовём их активными – элементы, по адресам которых в целевой матрице находятся единичные элементы опорного плана):

1) Выбираем максимальный активный элемент - x_{ij},

2) В i - ой строке выбираем минимальный пассивный элемент – (x_{min}),

3) В колонке, где расположен (x_{min}) выбираем активный элемент x_{i1j1},

4) В i_1 - ой строке находим минимальный пассивный элемент $(x_{min})_1$ и перекрёстный ему очередной активный элемент x_{i2j2},

5) Пункты 2, 3 и 4 выполняем до тех пор, пока воображаемый контур, соединяющий все участвующие в этом процессе элементы, не замкнётся.

6) Находим суммы активных (s_a) и пассивных (s_p) элементов, входящих в контур.

7) Если $s_p \geq s_a$, то опорный план считается оптимальным (в случае равенства – два оптимальных решения при одной и той же целевой функции). В противном случае – не оптимальным, поэтому переходим к п.2. И так до тех пор, пока очередная проверка не покажет, что $s_p \geq s_a$, что опорный план оптимальный и надо переходить к п.3.

3. Оформление оптимального плана решения и подсчёт величины целевой функции.

Приведём пример проверки опорного плана на оптимальность контурным методом (рисунки 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10). Пусть дан какой-либо опорный план (рис.5). Активные элементы в нём обозначены кружочками.

-	3	4	2	7
3	-	8	4	3
4	8	-	9	5
2	4	9	-	1
7	3	5	1	-

Рис.3

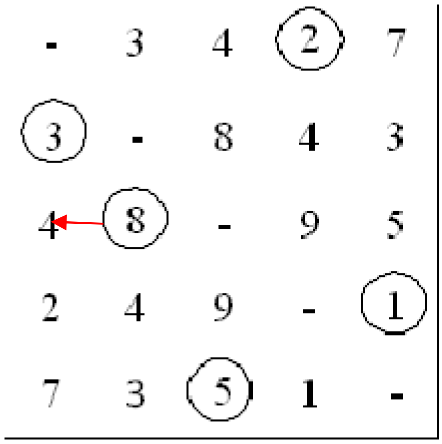

Рис.4

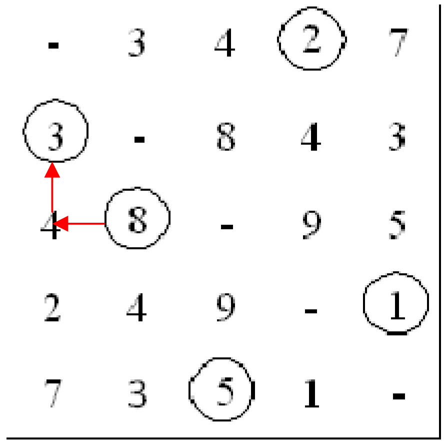

Рис.5

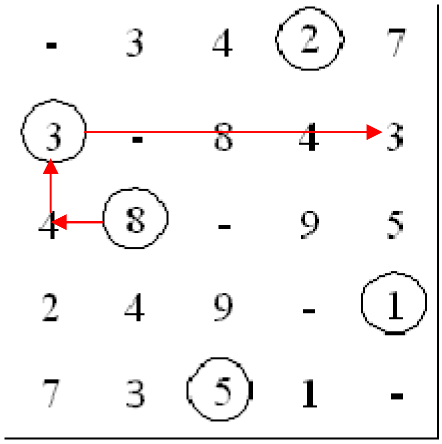

Рис.6

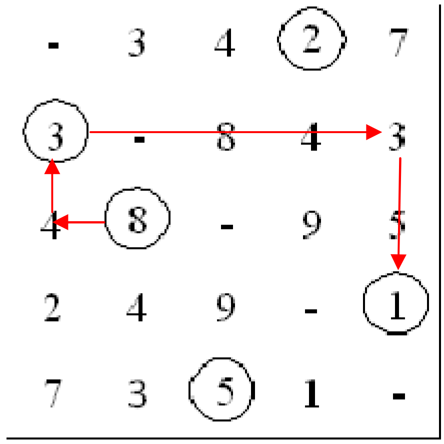

Рис.7

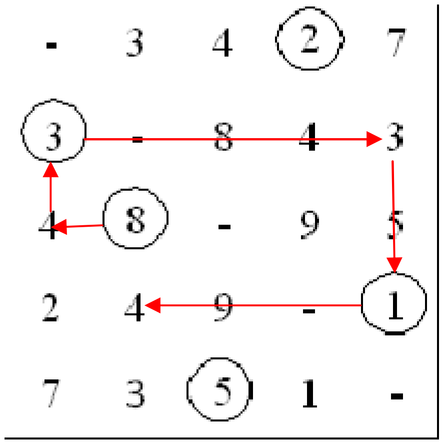

Рис.8

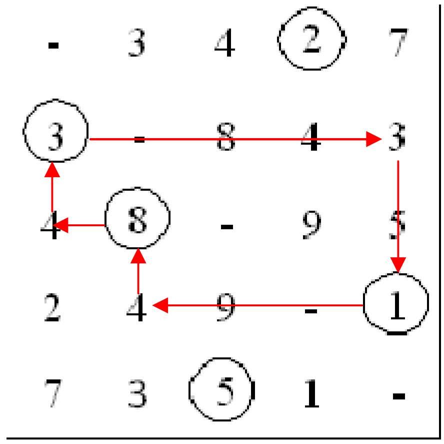

Рис.9

Сумма активных элементов контура

$s_a = x_{21} + x_{32} + x_{45} = 3 + 8 + 1 = 12$

Сумма пассивных элементов контура

$s_p = x_{25} + x_{31} + x_{45} = 3 + 4 + 4 = 11$

При $(s_p = 11) < (s_a = 12)$ опорный план не оптимален. После коррекции элементов контура новый опорный план (рис.10) будет оптимальным.

-	3	4	2	7
3	-	8	4	3
4	8	-	9	5
2	4	9	-	1
7	3	5	1	-

Рис.10

Решим **пример**. Дана матрица затрат (рис.11). Найти маршрут, удовлетворяющий всем условиям и ограничениям, при этом имеющий минимальную сумму затрат.

-	6	4	8	7	14
6	-	7	11	7	10
4	7	-	4	3	10
8	11	94	-	5	11
7	7	3	5	-	7
14	10	10	11	7	-

Рис.11

-	6	4	8	7	14
6	-	7	11	7	10
4	7	-	4	3	10
8	11	4	-	5	11
7	7	3	5	-	7
14	10	10	11	7	-

Рис.12

Сумма активных элементов контура

$s_a = x_{13} + x_{21} + x_{34} + x_{45} + x_{62} = 4 + 6 + 3 + 11 + 10 = 34$

Сумма пассивных элементов контура

$s_p = x_{12} + x_{26} + x_{31} + x_{43} + x_{65} = 6 + 10 + 4 + 4 + 7 = 31$

При $(s_p = 31) < (s_a = 34)$ опорный план не оптимален. После коррекции элементов контура новый опорный план (рис.13) будет оптимальным.

-	6	4	8	7	14
6	-	7	11	7	10
4	7	-	4	3	10
8	11	4	-	5	11
7	7	3	5	-	7
14	10	10	11	7	-

Рис.13

Таким образом, маршрут, удовлетворяющий всем условиям и ограничениям, при этом имеющий минимальную сумму затрат, будет следующим:

$$1 - 2 - 6 - 5 - 4 - 3 - 1$$

При этом целевая функция будет иметь величину:

$$Z(X) = x_{12} + x_{26} + x_{31} + x_{43} + x_{54} + x_{65} = 6 + 10 + 4 + 4 + 5 + 7 = 36$$

Конец статьи