<u>Задача о составлении рациона питания</u>

(Метод элементарных систем уравнений)

Вступление

Метод элементарных систем уравнений прост как в ручном использовании, так и в машинном. Рассмотрен алгоритм и несколько примеров решения этих задач.

Постановка задачи

Требуется составить ежедневный рацион питания животного на основе имеющихся видов кормов так, чтобы общая стоимость использованных кормов была минимальной. При этом животное не должно получать менее определенного количества питательных веществ, например, таких, как жиры**,** углеводы, белки, витамины и т.п.

Каждый вид корма содержит разную комбинацию этих веществ. Известна цена единицы веса каждого корма.

Пусть имеются n различных кормов (продуктов) $P_1, P_2, ..., P_n$ и перечень из m необходимых питательных веществ $S_1, S_2, ..., S_m$. Обозначим через a_{ij} содержание (в весовых единицах) i - го питательного вещества в единице j - го корма, а через b_i - минимальную суточную потребность животного в i - ом питательном веществе. Через x_j обозначим количество каждого вида корма в ежедневном рационе. Очевидно, что $x_j >= 0$.

Условия задачи можно представить в виде таблицы (табл.1)

вида питательного вещества неравенство-ограничение примет вид:

Для первого

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} \tag{1}$$

$$x_n >= b_1$$

Аналогично запишутся неравенства и для остальных питательных веществ. Общие затраты на весь рацион питания животного можно найти на основе линейной функции

$$Z(X)=c_1 x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (2)$$

Таблица1

Питательное вещество	a_{ii}				Суточная потребность
	P_1	P_2	…	P_n	
S_1 S_2 ... S_m	a_{11} a_{12} … a_{m1}	a_{12} a_{22} … a_{m2}	… … … …	a_{1n} a_{2n} … a_{mn}	b_1 b_2 … b_m
Стоимость 1 кг корма	c_1	c_2	…	c_n	-

Если эту функцию необходимо минимизировать, то математическая модель задачи составления рациона питания имеет вид

$$Z(X) = c_1 x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \longrightarrow \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n >= b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n >= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n >= b_m \end{cases}$$

$$x_j >= 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Алгоритм решения

1. Выявляем очередную элементарную систему уравнений.
2. В результате решения очередной элементарной системы уравнений определяем величины двух неизвестных с присвоением остальным значащим неизвестным, входящим в данные два уравнения, значений, равных нулю.

3. Если в системе ограничений остаются еще не определенные неизвестные, то, используя значения неизвестных, определенных в п.2, определяем их величины.

4. Путем подстановки величин определенных неизвестных в целевую функцию находим ее величину и запоминаем. При этом для задачи использования ресурсов эти запоминаемые величины целевой функции и относящихся к ней неизвестных от шага к шагу возрастают или не уменьшаются, а для задачи о составлении рациона питания уменьшаются или не увеличиваются.

5. Действия по п.1 – п.4 выполняются до тех пор, пока все элементарные системы уравнений не будут решены, а по результатам этих решений – не будут определены все величины целевой функции.

6. Выбираем максимальное значение целевой функции, определённые для неё неизвестные при решении задачи использования ресурсов и минимальное – при решении задачи о составлении рациона питания.

<u>Примеры</u>

Пример 1. Решить задачу

$$Z(X) = x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \longrightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

$x_j >= 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$

В системе ограничений выявим все возможные элементарные системы уравнений (выделены жирным шрифтом):

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + 2x_2} + 3x_3 + 3x_4 = \mathbf{9}, \\ \mathbf{x_1 + x_2} + x_3 + 2x_4 = \mathbf{5}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \mathbf{3x_3 + 3x_4} = \mathbf{9}, \\ x_1 + x_2 + \mathbf{x_3 + 2x_4} = \mathbf{5}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} + 2x_2 + \mathbf{3x_3} + 3x_4 = \mathbf{9}, \\ \mathbf{x_1} + x_2 + \mathbf{x_3} + 2x_4 = \mathbf{5}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \mathbf{2x_2} + 3x_3 + \mathbf{3x_4} = \mathbf{9}, \\ x_1 + \mathbf{x_2} + x_3 + \mathbf{2x_4} = \mathbf{5}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} + 2x_2 + 3x_3 + \mathbf{3x_4} = \mathbf{9}, \\ \mathbf{x_1} + x_2 + x_3 + \mathbf{2x_4} = \mathbf{5}. \end{cases}$$

Решим каждое из выделенных элементарных систем уравнений. (Порядок их решения элементарен. Поэтому он не приводится, а приводятся лишь полученные результаты)

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + 2x_2 = 9}, \\ \mathbf{x_1 + x_2 = 5}, \end{cases}$$

$X_1 = (1, 4, 0, 0)$

$Z_1(X_1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 5$

$$\begin{cases} \mathbf{2x_2 + 3x_3 = 9}, \\ \mathbf{x_2 + x_3 = 5}, \end{cases}$$

$X_2 = (0, -4, 17/3, 0)$

Это решение не подходит, т.к. в решении есть отрицательная переменная $x_2 = -4$.

$$\begin{cases} \mathbf{3x_3 + 3x_4 = 9}, \\ \mathbf{x_3 + 2x_4 = 5}. \end{cases}$$

$X_3 = (0, 0, 1, 2).$

$Z_3(X_3) = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 11.$

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + 3x_3 = 9}, \\ \mathbf{x_1 + x_3 = 5}. \end{cases}$$

$X_4 = (3, 0, 2, 0).$

$Z_4(X_4) = 1 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 13.$

$$\begin{cases} \mathbf{2x_2 + 3x_4 = 9}, \\ \mathbf{x_2 + 2x_4 = 5}. \end{cases}$$

$X_5 = (0, 3, 0, 1).$

$Z_5(X_5) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6.$

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + 3x_4 = 9}, \\ \mathbf{x_1 + 2x_4 = 5}. \end{cases}$$

$X_6 = (-3, 0, 0, 4).$

Это решение неприемлемо, т.к. в нем есть отрицательная переменная

$x_1 = -3.$

Условиям задачи соответствует решение

$X_1 = (1, 4, 0, 0).$

$Z_1(X_1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 5.$

Значит, оно и является оптимальным.

Пример 2. Решить задачу

$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 7x_6 \longrightarrow \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + x_5 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_6 = 30. \end{cases}$$

$x_j >= 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Для удобства выбора элементарных систем уравнений систему ограничений перепишем в виде

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 10, \\ 2x_1 - 1x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 30. \end{cases}$$

$x_j >= 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Система ограничений состоит из 45 элементарных систем уравнений.

Но здесь достаточно привести лишь три из них – оптимальное, неоптимальное и неприемлемое. Для этого выделим и решим следующие элементарные системы уравнений (выделены жирным шрифтом):

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + \mathbf{3x_3 + 1x_4} + 0x_5 + 0x_6 = \mathbf{10}, \\ 2x_1 - 1x_2 \mathbf{- 4x_3 + 0x_4} + 1x_5 + 0x_6 = \mathbf{20}, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 30. \end{cases}$$

Перед решением этой элементарной системы уравнений все значащие неизвестные первой и второй строк, не вошедшие в нее, принимаются равными нулю, т.е. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_5 = 0$.

Решив данную элементарную систему уравнений, получим значения

$x_3 = - 5$, $x_4 = 25$.

Решение неприемлемо, т.к. одно из неизвестных ($x_3 = -5$) имеет отрицательную величину.

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 10, \\ 2x_1 - 1x_2 - 4x_3 + 0x_4 \mathbf{+ 1x_5 + 0x_6 = 20}, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 0x_4 \mathbf{+ 0x_5 + 1x_6 = 30.} \end{cases}$$

Перед решением этой элементарной системы уравнений все значащие неизвестные второй и третьей строк, не вошедшие в нее, принимаются равными нулю, т.е. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Решив данную элементарную систему уравнений, получим значения

$x_5 = 20$, $x_6 = 30$.

Подставим эти значения в первое уравнение. Тогда

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10$$

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + x_4 = 10$$

$$x_4 = 10$$

$X_2 = (0, 0, 0, 10, 20, 30)$.

Решение приемлемо. Вычислим целевую функцию.

$Z_2(X_2) = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 7x_6$

$Z_2(X_2) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 30 = 380$

$$\begin{cases} 1x_1 \mathbf{+ 2x_2} + 3x_3 + 1x_4 \mathbf{+ 0x_5} + 0x_6 = \mathbf{10}, \\ 2x_1 \mathbf{- 1x_2} - 4x_3 + 0x_4 \mathbf{+ 1x_5} + 0x_6 = \mathbf{20}, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 30. \end{cases}$$

Перед решением этой элементарной системе уравнений все значащие неизвестные первой и второй строк, не вошедшие в нее, принимаются равными нулю, т.е. $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Решив данную элементарную систему уравнений, получим значения

$x_2 = 5$, $x_5 = 25$.

Подставим эти значения в третье уравнение. Тогда

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_6 = 30.$$

$$3 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 5 \cdot 0 + x_6 = 30.$$

$x_6 = 40.$

X_3 = (0, 5, 0, 0, 25, 40). Решение приемлемо. Вычислим целевую функцию

$Z_3(X_3) = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 7x_6$

$Z_3(X_3) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 – 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 25 + 7 \cdot 40 = 445$

Решение *X2* = (0, 0, 0, 10, 20, 30) соответствует условиям задачи. Это значит, что оно является оптимальным (с учетом и тех оставшихся, непоказанных решений).

Ниже приведены исходные данные и результаты решения задач о составлении рациона питания (табл. 3.2).

Исходные данные и результаты решения некоторых задач о составлении рациона питания

Таблица 3.2

№ п/п	Исходные данные к задаче	Оптимальные решения
1	$Z(X) = 4x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$ $- x_1 + 2x_2 + 2x_3 <= 15$ $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4$ $x_1 + 2x_2 - x_3 >= 8$	X* = (0, 53/8, 7/8) Z(X) = - 39/8
2	$Z(X) = 10x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$ $2x_1 - x_2 >= 3$ $x_1 + x_2 >= 2$ $x_1 + 2x_2 >= -1$	X* = (5/3, 1/3) Z(X) = 15
3	$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 \rightarrow \min$ $2x_1 + 3x_2 + x_3 >= 4$ $-3x_1 + x_2 + x_3 <= 4$ $-x_1 + x_2 + 2x_3 >= 6$	X* = (0, 2, 2) Z(X) = 26

4	$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$ $2x_1 - x_2 + x_3 <= 12$ $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3$ $-x_1 + 2x_2 + x_3 >= 6$	$X^* = (4, 5, 0)$ $Z(X) = 22$
5	$Z(X) = 4x_1 - 6x_2 - 8x_3 + 10x_4 \rightarrow \min$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ $-x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2$	$X^* = (0, 8, 0, 2)$ $Z(X) = -28$

Для данной задачи имеется БЕСПЛАТНОЕ миатематическое обеспечение (исполняемый модуль программы и др.), которое можно востребовать по адресу nabocharov@rambler.ru Бочаров Николай Алексеевич.

Глоссарий

Переменные задачи – величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые полностью характеризуют экономический процесс;

Система ограничений **–** система уравнений и неравенств, которым удовлетворяют переменные задачи и которые следуют из ограниченности ресурсов или других экономических или физических условий (положительности переменных и др.);

Целевая функция – функция переменных задачи, которая характеризует качество выполнения задачи и экстремум которой требуется найти;

Элементарная система уравнений - система из двух уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Конец статьи