

Перекрёстный метод как новое графическое решение систем алгебраических линейных уравнений с тремя неизвестными и задач линейного программирования

Автору пришлось потратить немало усилий в поисках внятного примера графического решения системы линейных уравнений третьего порядка (т.е. когда количество уравнений и количество неизвестных равны трем). Эти усилия так и не увенчались успехом. Только в Интернете скромно прозвучало одно утверждение: “К сожалению, этот удобный и наглядный способ исследования и решения систем линейных уравнений (речь шла о графической интерпретации решения системы из двух уравнений с двумя неизвестными) не может быть применен к системам уравнений, содержащим более двух неизвестных, т.к. на плоскости (читаем - на листе бумаги) нет геометрического образа, который соответствовал бы уравнению с числом неизвестных, равным трем”. Этот источник лишь утверждает, что результатом графического решения системы из трех уравнений с тремя неизвестными являются координаты точки пересечения трех плоскостей, построенных в ее пространстве, исходя из содержания уравнений, входящих в эту систему, и приводит для наглядности и в подтверждение этого утверждения соответствующий рисунок (рис.1).

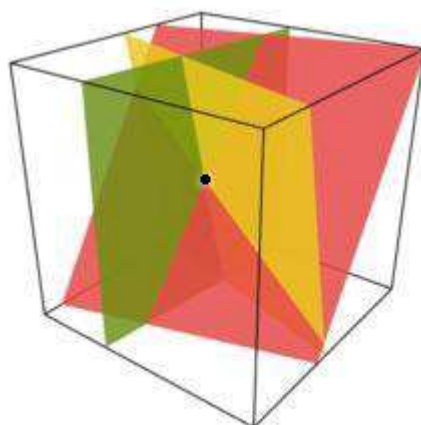


Рис.1

В соответствии с рисунком 1 систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными определяет набор трех плоскостей. Точка пересечения этих плоскостей принадлежит каждой из них и является решением.

Но это только общие слова, не дающие методологии по-настоящему графического (с помощью линий на листе бумаги) решения системы линейных уравнений третьего порядка. Автор в данной работе предлагает свой, реализуемый именно на листе бумаги, графический метод их решения. Называется он *перекрестным*.

Алгоритм решения

Графическое решение систем алгебраических линейных уравнений в Декартовой прямоугольной системе координат может выполняться в двух вариантах её изображений – аксонометрии и планиметрии. Но алгоритм решения в обоих вариантах остается тот же.

1. Построение аксонометрии Декартовой прямоугольной системы координат. При этом принимается соглашение, что осям координат вместо привычных имен-обозначений x , y и z присваиваются 1 , 2 и 3 соответственно. Эти, цифровые, имена при графическом решении задач имеют большую наглядность и менее “засоряют” рисунок, если не говорить, что без них обойтись нельзя вообще.
2. Градуировка осей координат в относительных единицах измерения.
3. Построение образов исходных уравнений, т.е. нанесение стяжек в соответствии с видом уравнений и присвоение им имен. Имя стяжки имеет вид двузначного числа, отражающего имена (*номера*) координатных осей, которые она стягивает. Причём, первая цифра его всегда соответствует младшему номеру из них. Например, стяжки 12 означает, что она стягивает оси координат 1 и 2 . Здесь же точку пересечения двух одноименных стяжек будем называть перекрестком, присваивая ему номер, аналогичный номеру одноименных перекрещивающихся в нём стяжек.
4. Выявление перекрестков и присвоение им имен.
5. Трассировка перекрестков, т.е. проведение прямолинейных трасс через разноименные перекрестки.
6. Выявление точки пересечения трасс (точки сходимости) и определение ее координат как результатов решения системы уравнений.

Подтвердим правомерность этого алгоритма путем решения двух примеров.

Пример 1. Решить следующую систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными перекрестным графическим методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Решим данную задачу в точном соответствии с представленным выше алгоритмом.

- Построим в аксонометрии Декартову прямоугольную систему координат **O123** (рис.2),

- Проградуируем оси координат в относительных единицах измерения,

- Построим образы исходных уравнений (порядок их построения приведён на стр.6). На рисунке их три (по количеству исходных уравнений): **ABC(синий)**, **DEF(красный)** и **GHE(зелёный)**. Обозначим стяжки, из которых они состоят, соответствующими двузначными номерами как по цвету так и по тому, какие оси координат они стягивают.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, & \text{- синий контур} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, & \text{- зелёный контур} \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4. & \text{- красный контур} \end{cases}$$

- Выявим перекрестки (см. Пояснения к рисунку, п.7 на стр.5). Они образуются при пересечении лишь ОДНОимённых стяжек.

- Проведём трассы – прямые, соединяющие перекрестки: это

1) **NP**, проходящая через перекрестки **O(23)** и **P(13)**

2) **NL**, проходящая через двойной перекресток **E(12,23)** и перекресток **L(13)**

3) **NM**, проходящая через перекрестки **K(23)**, **R(12)** и **M(13)**

Обратим внимание на то, что каждая трасса включает в себя лишь РАЗНОимённые перекрестки.

- Выявляем точку пересечения трасс (точку схождения) – **N**.

- Определяем координаты точки **N** как результаты решения системы уравнений путём простого измерения обычной линейкой соответствующих отрезков. При этом надо помнить, что величину отрезка,

Пояснения к рисунку 2

1. Прямые:

DP – продолжение прямой FD ,

AP – продолжение прямой CA ,

ER – продолжение прямой GE ,

BO – продолжение прямой CB ,

BR – продолжение прямой AB ,

EO – продолжение прямой FE ,

OT – продолжение координатной оси I в сторону отрицательных значений.

2. Выноски, указывающие на стяжки, объявляют двузначное имя этих стяжек.

3. Выноски, указывающие на точки осей координат, объявляют цифровое значение этих координат.

4. На рисунке отсутствует обозначение точки пересечения прямой MS и координатной оси 3 . Пусть эта точка будет обозначена буквой U .

5. Все стяжки обозначены окрашенными под их цвет двузначными номерами, каждая из цифр которых указывает на то, из каких координатных осей исходит данная стяжка

6. Оси координат против их привычных обозначений x , y и z обозначены цифрами 1 , 2 и 3

7. Перекрёстки:

$L(13)$ – точка пересечения стяжек HG и FD ,

$M(13)$ – точка пересечения стяжек AC и HG ,

$P(13)$ – точка пересечения стяжек FD и AC ,

$E(12,23)$ – точка пересечения стяжек DE и GE , а также – FE и HE соответственно,

$K(23)$ – точка пересечения стяжек BC и HE ,

$O(23)$ – точка пересечения стяжек BC и EF

$R(12)$ – точка пересечения стяжек AB и GE

Общее количество перекрёстков должно быть равно девяти. Но точка $E(12,23)$ совмещает в себе два из них, а стяжки 12 (синяя и красная) ввиду своей параллельности не пересекаются.

8. Числа $5/2$, $5/3$, $2/3$ – дробные.

Порядок построения образов уравнений

1. Построение (в аксонометрии или планиметрии) Декартовой системы координат (рис.3),
2. Построение в пределах системы координат образов уравнений в условиях, когда одну из неизвестных величин уравнения оставляем не равной нулю, остальным же присваиваем нулевые значения, в результате чего получаем значение ненулевой переменной и отмечаем его на соответствующей оси ординат. Поясним это на исходных данных Примера 1,

Значения координат точек x_1 , x_2 и x_3 будем откладывать соответственно на координатных осях с именами **1**, **2** и **3** соответственно (против традиционных x , y и z).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$$

Уравнение 1: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$.

Пусть $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Тогда $x_3 = 5/3$. На оси x_3 отмечаем точку C , координата которой по оси **3** равна $5/3$. (Причём, по правилам построения системы координат в аксонометрии абсолютная величина координаты для правильного восприятия рисунка и получения точных координат точки решения задачи должна быть – по линейке – в два раза меньше, чем $x_3 = 5/3$, т.е. она должна быть равна $x_3 = 5/6$).

Пусть $x_1 = 0$ и $x_3 = 0$. Тогда $x_2 = 5/2$. На оси x_2 отмечаем точку B , координата которой по оси **2** равна $5/2$.

Пусть $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$. Тогда $x_1 = 4$. На оси x_1 отмечаем точку A , координата которой по оси **1** равна 5 .

Соединив полученные точки A , B и C , получим синий контур – образ первого уравнения, образованный тремя стяжками под именами **12** (соединяет точки A и B , расположенные на осях **1** и **2**), **13** (соединяет точки A и C , расположенные на осях **1** и **3**) и **23** (соединяет точки B и C , расположенные на осях **2** и **3**)

Аналогичным образом строятся контуры второго (красный) и третьего (зелёный) уравнений (рис.2).

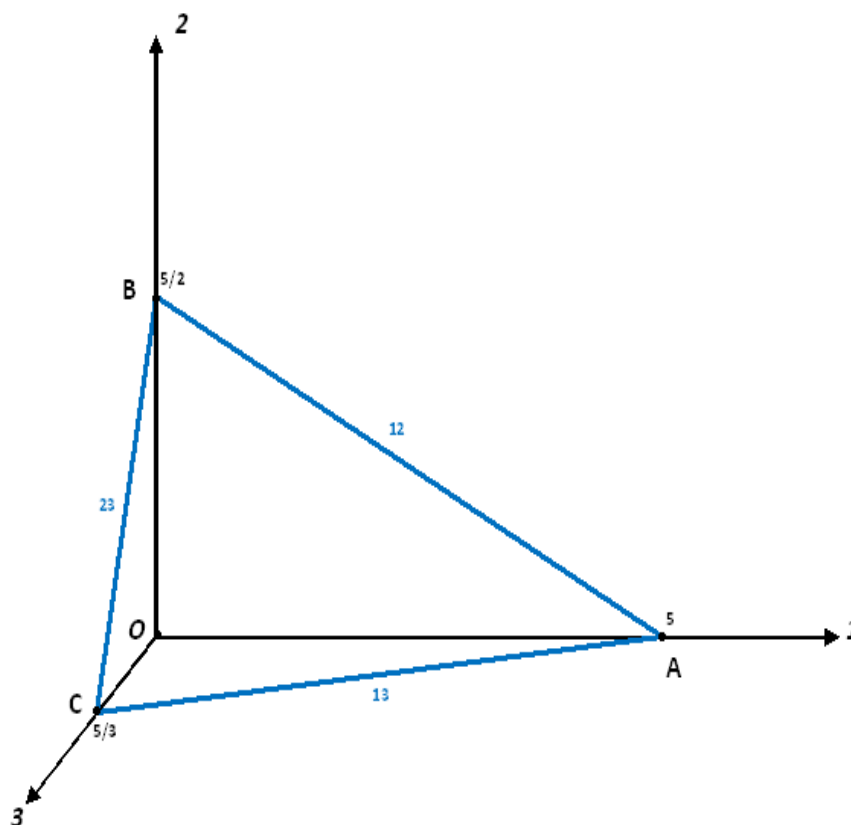


Рис.3

Методика определения координат точки схождения

1. Из точки K , находящейся в координатной плоскости 23 , параллельно оси 2 до пересечения с осью 3 проводим прямую KU .
2. Через точки M и U проводим прямую MU с продолжением
3. Из точки схождения N параллельно оси 2 в сторону линии MU проводим прямую до пересечения с нею в точке S .
4. Из точки S проводим прямую, параллельную оси 3 до её пересечения с отрицательной частью оси 1 в точке T .

В результате таких построений мы получаем величины отрезков OT , NS и TS , представляющие собой значения переменных системы уравнений соответственно x_1 , x_2 и x_3 .

Вероятнее всего, существуют и другие способы получения координат точки сходимости, а через них – значений переменных системы уравнений. Досужему читателю предоставляется возможность убедиться в этом самому.

Пример 2. Решить задачу линейного программирования (систему из трех уравнений с тремя неизвестными) перекрестным графическим методом:

$$Z(X) = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Стратегия решения задачи:

- Найти все возможные решения,
- Выбрать из возможных решений наилучшее (ие), удовлетворяющее условиям задачи.

Решение. Построим в аксонометрии Декартову прямоугольную систему координат **O123** (рис.4) и цветными линиями нанесем образы исходных уравнений по методике, описанной в Примере 1 (см.выше).

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 3, & \text{- синий контур} \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, & \text{- зелёный контур} \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, & \text{- красный контур} \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Выявим и поименуем перекрестки (их имена – в скобках). Их всего шесть вместо максимально возможного количества, равного девяти, т.к. стяжки зеленая (12) и синяя (12), а также красная (13) и синяя (13), параллельны, а красные (12,13) и зелёные (12,13) в точке **B** пересекаются дважды.

Вот эти, обозначенные буквами, перекрестки: **K(12)**, **B(12,13)**, **P(13)**, **M(23)**, **S(23)** и **L(23)**. Координаты каждого из них дают свое возможное решение. Но кроме них есть ещё одно. Проведём трассы через точки **K** и **L**, **B** и **S**, а также **P** и **M**. Эти три трассы имеют пересечение в точке схождения **N**, координаты которой также можно рассматривать как одно из возможных решений.

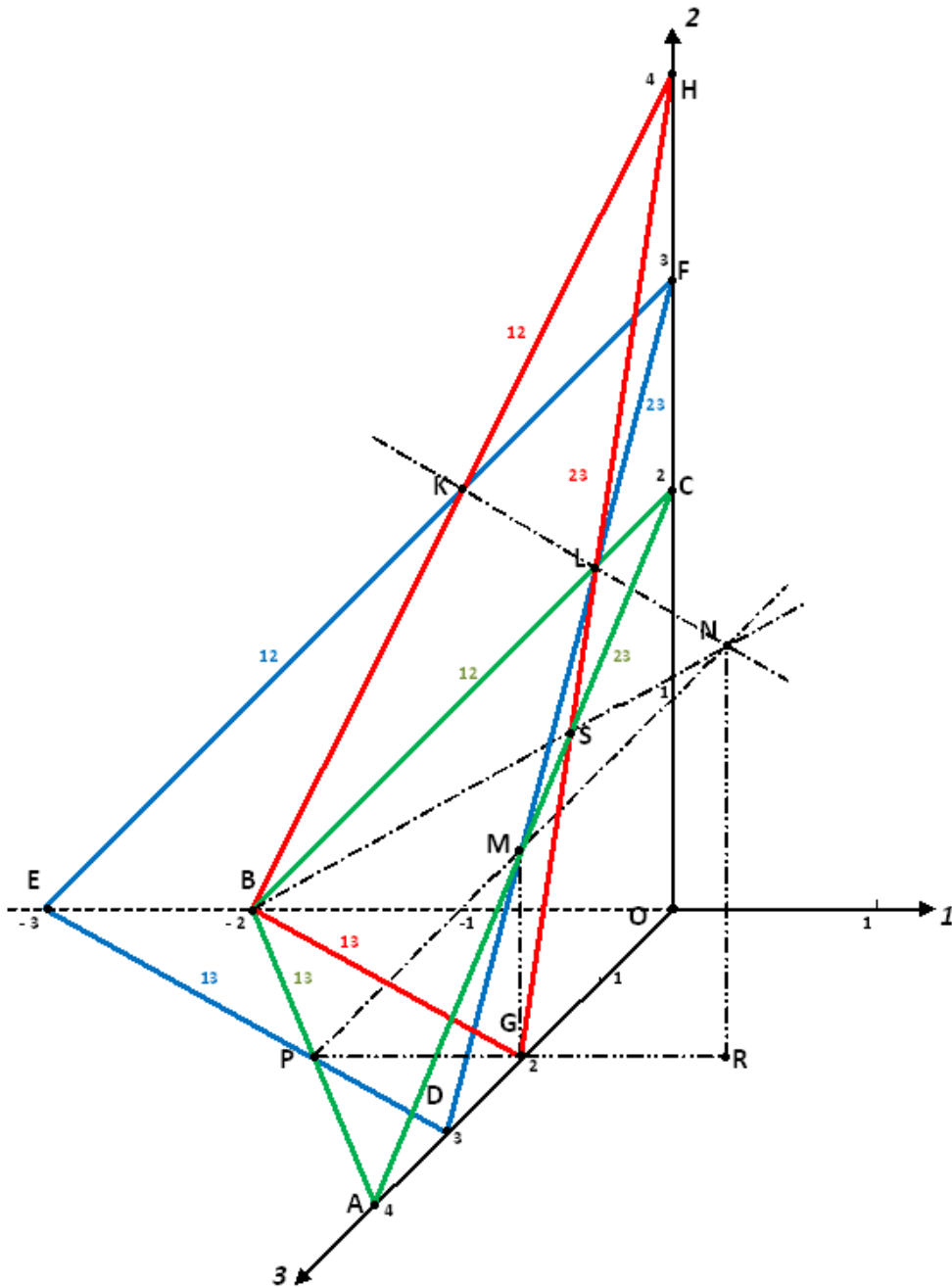


Рис.4

Координаты перекрёстков определяются известным графическим способом (хотя можно и путём расчётного решения соответствующих систем из двух уравнений с двумя неизвестными).

Координаты же точки схождения N определяются путём достроений рисунка 4 (прямые MG , PR и NR) т.е. так же, как и при решении Примера 1.

Таким образом, координаты (они же – величины теперь уже известных x_1 , x_2 и x_3) представлены в следующем списке:

$$\begin{aligned}
K & (-1, 2, 0) \quad , \\
B & (-2, 0, 0), \\
P & (-1, 0, 2), \\
M & (0, 1, 2), \\
S & (0, 4/3, 4/3), \\
L & (0, 2, 1), \\
N & (1, 2, 2).
\end{aligned}$$

В этом списке решения $K(-1, 2, 0)$, $B(-2, 0, 0)$ и $P(-1, 0, 2)$ не подходят, т.к. каждое из них в противовес условиям задачи имеет значение $x_1 < 0$.

Подставляя значения неизвестных каждого из оставшихся в списке решений в целевую функцию и проанализировав каждый полученный результат, приходим к выводу, что единственным, удовлетворяющим всем ограничениям и условиям поставленной в Примере 2 задачи является решение $N(1, 2, 2)$, которое даёт следующее, оптимальное, значение целевой функции

$$Z(X) = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \rightarrow \min$$

или

$$Z(X) = -2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = -16$$

Ответ: $\text{Min } Z(X) = -16$ при $X^* = (1, 2, 2)$.

Пример 2 считается решённым.

Пример 3. Решить задачу линейного программирования (систему из трех уравнений с тремя неизвестными) перекрёстным графическим методом:

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases}
-2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12, \\
x_1 + x_2 + x_3 \leq 9, \\
3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 12.
\end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Стратегия решения задачи:

- Найти все возможные решения,
- Выбрать из возможных решений наилучшее (ие), удовлетворяющее условиям задачи.

Решение. Построим в аксонометрии Декартову прямоугольную систему координат *O123* (рис.5) и цветными линиями нанесем образы исходных уравнений по методике, описанной в Примере 1 (см. выше).

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12, & \text{- синий контур (PTD)} \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 9, & \text{- зелёный контур (RSF)} \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 12. & \text{- красный контур (APU)} \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Выявим и поименуем перекрестки. На рисунке виден их полный список: *B(12)*, *X(12)*, *C(12)*, *G(13)*, *V(13)*, *P(13)*, *E(23)*, *N(23)* и *P(23)*. Примечательно, что точка *P* объединяет два перекрёстка – *13* и *23*. А незначащие точки *X(12)* и *Y* изображены лишь схематически ввиду того, что выходят за границы рисунка.

Координаты этих точек являются потенциальными решениями. Но конкретно, какие из них будут таковыми, можно узнать лишь после построения области допустимых решений. Она на рисунке имеет вид 7-гранной фигуры (три из этих граней совпадают с координатными плоскостями) – *ABCDEFGHO*. Эта фигура получена путём пересечения всех трёх плоскостей – образов исходных уравнений. А такое пересечение, кроме всего прочего, обязательно даёт точку их пересечения (см. стр. 1). И этой точкой является точка *H(1/2, 1/2, 11/2)*, лежащая одновременно на всех трёх плоскостях. Рисунок даже позволяет вычислить её координаты наравне с координатами всех перекрёстков. На рисунке показана ещё одна точка потенциального решения – точка *Y*, представляющая собой точку сходимости трёх трасс (см. Пример 1). Правда, она, коль скоро в область допустимых решений не входит, из рассмотрения исключается, а потому и трассы на рисунке не отображены.

$A(4, 0, 0)$	8
$B(6, 3, 0)$	24
$C(3, 6, 0)$	30
$D(0, 4, 0)$	16
$E(0, 3/2, 15/2)$	27/2
$F(0, 0, 9)$	9
$G(3/2, 0, 15/2)$	21/2
$H(1/2, 1/2, 11/2)$	29/2

Но условия нашей задачи требуют чисто графическое решение. А для этого требуется построение образа целевой функции, методика которого приведена на странице 15. Для нашей задачи образ целевой функции будет выглядеть, как показано на рис. 6.

Пояснения к рисунку 6.

1. На рисунок 6 перенесены с рисунка 5 точки области допустимых решений (в виде четырёхконечных звёздочек) – A, B, C, D, E, F, G и H .

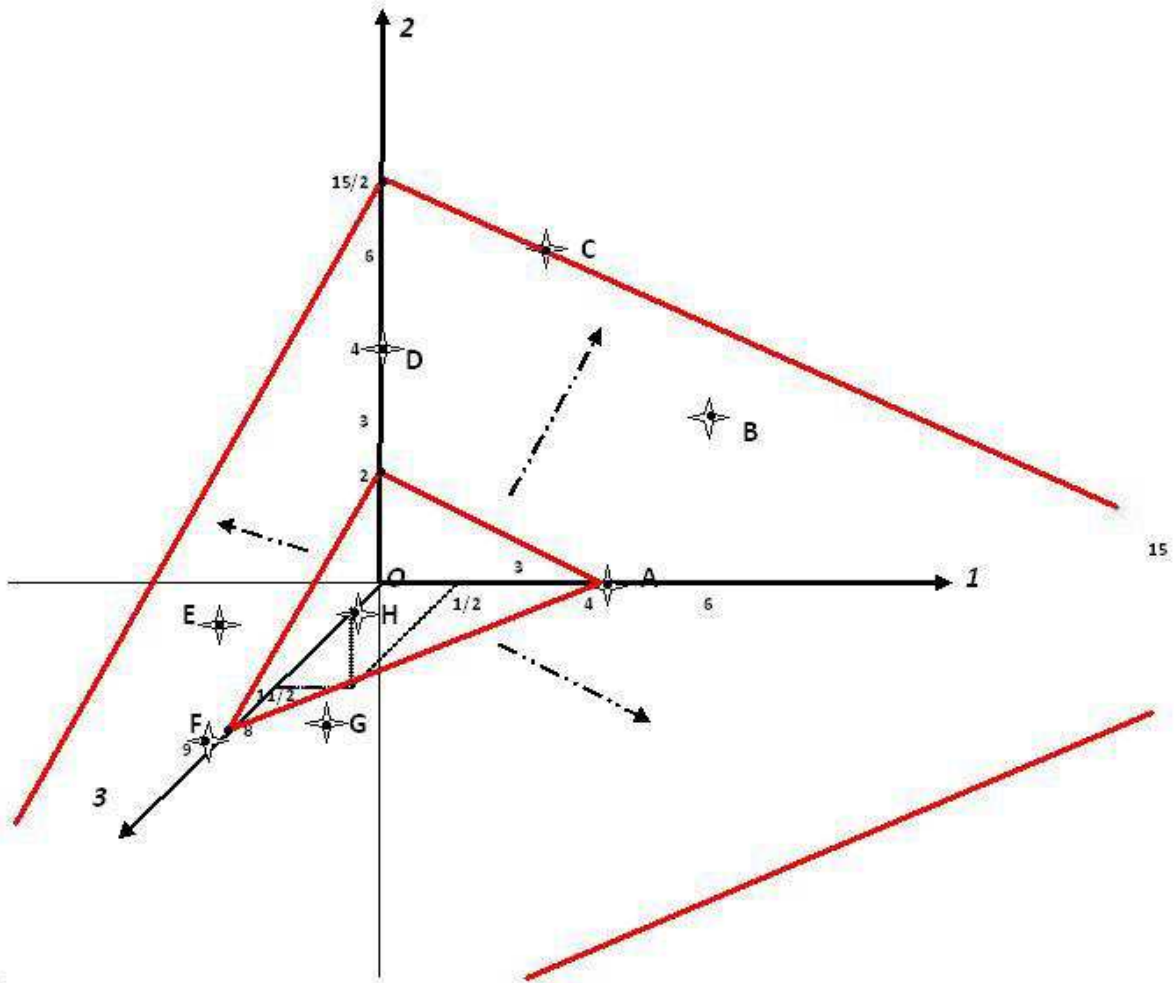
2. В Декартовой системе координат построен номинальный образ целевой функции 4-2-8. При этом построение проходило так, что $M = 8$. Тогда целевая функция примет вид $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$, что даёт основание строить контур по правилам построения обычного уравнения.

При параллельном (в соответствии с соотношением коэффициентов целевой функции) движении фронта целевой функции от начала координат в сторону бесконечности след, оставляемый от её пересечения с координатными плоскостями, будет пересекать и точки допустимых решений.

Как видно из рисунка, первой такой точкой является точка A . Это означает, что при подстановке в целевую функцию её координат величина целевой функции будет минимальной.

Последней точкой, которую целевой фронт пересечёт, явится точка C . Это означает, что при подстановке в целевую функцию её координат величина целевой функции будет максимальной. Целевой фронт при этом займёт положение, изображённое на рис.6 контуром (нижние углы выходят за пределы рисунка) 15-15.2-30.

Кстати говоря, движение целевого фронта может проводиться и в противоположном направлении. Тогда наоборот, первая встречная точка даст максимум, последняя – минимум.



30

Рис.6

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

или

$$Z(X) = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 30$$

Ответ: $\max Z(X) = 30$ при $X^* = (3, 6, 0)$.

Пример 3 считается решённым.

Построение образа целевой функции

Пусть оптимальное значение целевой функции уже известно. Обозначим его величину буквой M . Поочерёдно присвоим ей несколько произвольных значений. Пусть такими значениями будут 2, 4, 8 и 16.

1. $M = 2$. Тогда целевая функция будет выглядеть $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$. Здесь и далее строим её образ так же, как и образ обычного уравнения. На рис.6 это будет контур 2-1-4.
2. $M = 4$. Тогда целевая функция будет выглядеть $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4$. На рис.6 это будет контур 4-2-8.
3. $M = 8$. Тогда целевая функция будет выглядеть $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$. На рис.6 это будет контур 8-4-16.
4. $M = 16$. Тогда целевая функция будет выглядеть $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 16$. Строим её образ так же, как и образ обычного уравнения. На рис.6 это будет контур ABC .

На рис.6 видны четыре параллельные, вложенные друг в друга, треугольные плоскости, ограниченные координатными плоскостями.

Достроим рисунок таким образом, чтобы на основе контура ABC

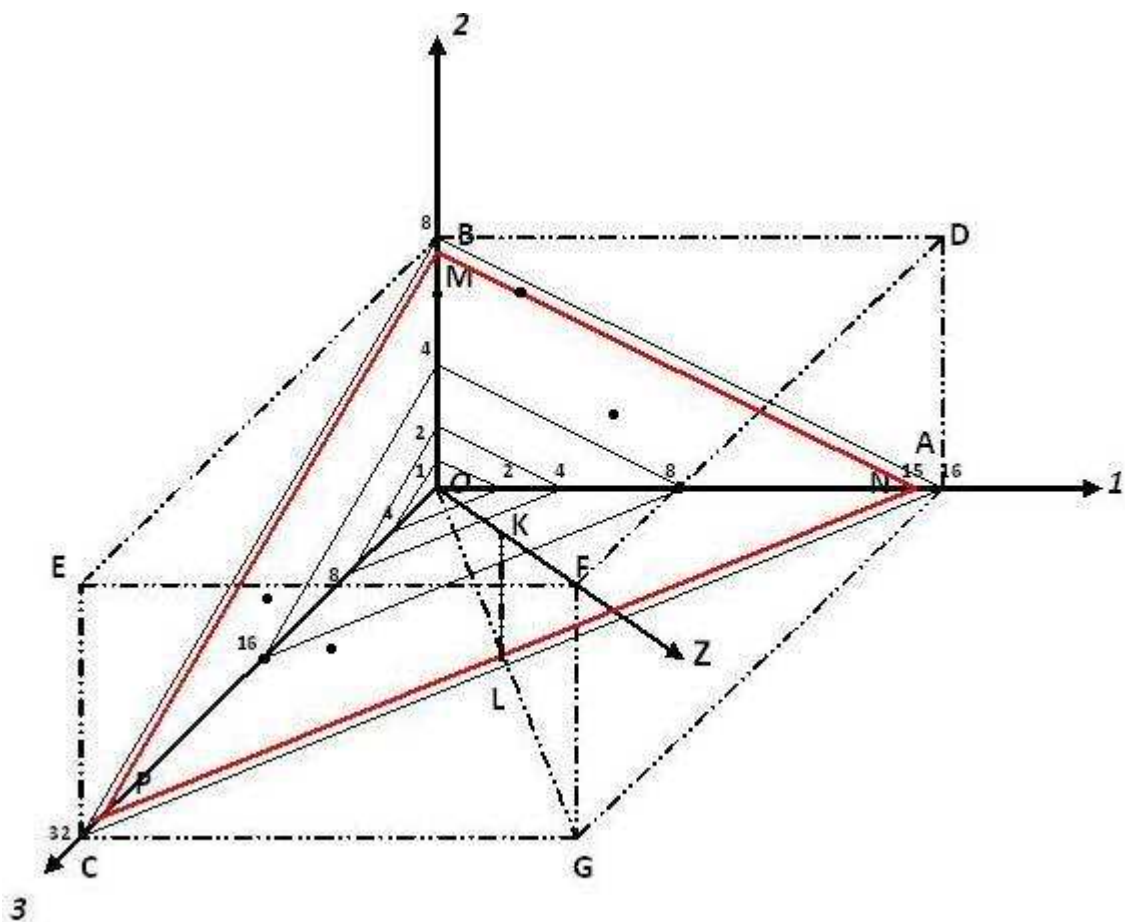


Рис.7

получился параллелепипед $ADBOGFEC$. Проведём прямую OF (вектор направленности Z).

Итак, образ целевой функции сформирован. Он имеет свойство динамичности, т.е. при присвоении величине M значений (не обязательно дискретных) в диапазоне $0 \div \infty$ плоскость ABC (образ целевой функции), не меняя описанных условиями задачи взаимоотношений переменных в ней, будет продвигаться в направлении вектора Z , увеличиваясь при этом в своих размерах, скользя прямыми AB , BC и AC по соответствующим координатным плоскостям и пересекая область допустимых решений, в том числе – её граничные точки, представляющие для нас особый интерес как точки возможного оптимального решения. При этом оптимальным решением задачи на минимум явятся координаты самой первой точки области допустимых решений, встретившейся на её пути, на максимум – самой последней.

Примечание:

Проанализировав решение систем из трех уравнений с тремя неизвестными графическим методом, можно заметить, что, осуществляя начертание рисунков для этого в аксонометрии, мы с помощью графических построений получаем в итоге значения всех неизвестных. Правда, аксонометрическое построение рисунков сложнее и менее обозреваемое. Планиметрическое же исполнение рисунков намного проще, но оно дает нам в качестве решения чаще всего значения не всех неизвестных. Остальные неизвестные приходится “добывать”, проверяя найденные неизвестные путем их подстановки в заданную систему уравнений.

Кроме того, во время графического решения любой задачи есть причины получения результата, несколько отличного от правильного ответа. Это – субъективные и инструментальные ошибки. Поэтому всегда полученные результаты необходимо проверять путём подстановки их в исходные уравнения. Обычно расхождения находятся в таких допустимых нормах, которые путём логического умозаключения позволяют найти истинное решение.

Автор не нашёл аналогов данному методу решения. Поэтому сравнительные оценки данного метода отсутствуют за исключением того, что данный метод, как и любой другой графический метод, даёт наглядность решения задачи, а также развивает абстрактное мышление и навыки начертательного исполнения.

В довершение отмечу, что предложенный перекрёстный метод в качестве нового графического решения систем алгебраических линейных уравнений с тремя неизвестными и задач линейного программирования был разработан специально для его внедрения с теми же целями в разработанную этим же автором “Реальную многомерную произвольно-угольную систему координат” (<http://optimat.ucoz.ru/load/0-0-0-43-20>), для чего Декартова прямоугольная трёхмерная система координат и послужила в качестве полигона при отработке данного метода.

Глоссарий

Координатная точка – точка на плоскости или в пространстве системы координат, положение которой необходимо определить;

Стяжка – прямая, соединяющая (стягивающая) две оси координат;

Имя стяжки – двузначная цифра, каждая из которых представляет собой номера осей координат, стягиваемых данной стяжкой. Причем первая из них всегда наименьшая, и представляет собой номер оси координат с наименьшим номером;

Перекресток – точка пересечения двух одноименных стяжек;

Имя перекрестка – имя точки пересечения одноименных стяжек или их продолжений в пространстве, совпадающее с именем самих стяжек;

Образ уравнения – графическая интерпретация уравнения;

Контур – (во множественном числе, чтобы принципиально не путать с правильным **контуры**, обозначающим силуэт, намеренно применяется слово **контурà** с ударением на последнюю букву) чаще всего это замкнутая фигура, состоящая из совокупности прямых на плоскости; вырожденный контур может принимать вид незамкнутой фигуры, прямой линии или просто точки;

Трасса – прямая линия, проходящая через несколько разноименных перекрестков;

Точка схождения – точка пересечения нескольких трасс;

Список литературы

1. “Курс начертательной геометрии”, В.О. Гордон, М.А. Семенцов–Огиевский. М. 1971
2. Internet resource: [http\\www.ru.wikipedia.org](http://www.ru.wikipedia.org)

Конец статьи